

CORPS DIFFÉRENTIELS ET FLOTS GÉODÉSQUES I :

UN CRITÈRE DYNAMIQUE D'ORTHOGONALITÉ AUX CONSTANTES POUR LES D -VARIÉTÉS
RÉELLES

RÉMI JAOUÏ

ABSTRACT. We present a criterion of orthogonality to the constants for absolutely irreducible real D -varieties relying on the topological dynamic of the associated real analytic flow. More precisely, we prove that if there exists Zariski-dense invariant compact region of the smooth locus of real points of X where the dynamic of the real analytic flow is topologically weakly mixing, then the generic type of (X, v) is orthogonal to the constants.

This criterion will be applied in a second part of this article to the model-theoretic study of the geodesic flow of compact real algebraic Riemannian manifolds with negative curvature.

Dans son article [Poi95], Poizat décrit les corps différentiellement clos comme "les compagnons de route de la théorie des modèles". Une première raison pour cela est qu'ils présentent d'une part un caractère modéré (leur théorie est ω -stable) et d'autre part une structure suffisamment riche pour exhiber de multiples pathologies possibles dans ce contexte. Par exemple, il a fallu attendre les résultats de Shelah sur les modèles premiers dans une théorie ω -stable [She79] pour démontrer l'existence, pour tout corps différentiel, d'une clôture différentielle ; le cadre différentiel n'offrant aucune simplification par rapport au cas général. A ce sujet, Rosenlicht [Ros74] avait remarqué que cette clôture différentielle n'est pas toujours minimale, c'est-à-dire qu'elle peut contenir des sous-extensions différentielles strictes, elles-mêmes différentiellement closes.

Tout en s'appuyant sur l'étude des théories ω -stables et de la théorie géométrique de la stabilité, l'étude des corps différentiellement clos s'est progressivement enrichie en se nourrissant des développements de l'algèbre (commutative) différentielle et de ses avatars géométriques. Un exemple impressionnant d'une telle interaction est la preuve de Hrushovski [Hru96] de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonctions de caractéristique 0, s'appuyant sur le yoga des théories stables et sur les résultats de Buium [Bui93] concernant l'algèbre différentielle des variétés abéliennes. Parallèlement, Pillay [Pil98] a proposé une reformulation, puis une généralisation, de la théorie de Galois différentielle *à la Kolchin* dans le cadre modèle-théorique des groupes de liaison.

Plus récemment, les applications de la théorie des modèles des corps différentiellement clos se sont orientées vers l'étude d'équations différentielles algébriques "concrètes" afin d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique sur leurs solutions et leurs dérivées. Les travaux de Nagloo et Pillay [NP14] sur les équations de Painlevé, ainsi que ceux de Freitag et Scanlon [FS14] sur l'équation minimale d'ordre 3 satisfaite par la fonction j sont deux illustrations de cette tendance.

Cet article constitué de deux parties a pour objet l'étude modèle-théorique d'équations différentielles algébriques issues de la mécanique classique.

Le statut de compagnon de route accordé par Poizat aux corps différentiellement clos doit être entendu dans un sens très large, ne se limitant pas à l'étude de la clôture différentielle : les résultats de Hrushovski, Pillay, Nagloo, Freitag et Scanlon, évoqués dans les paragraphes précédents, s'appuient tous sur des idées motrices du développement de la théorie géométrique de la stabilité, que nous rappelons brièvement.

Tout d'abord, on sait depuis Shelah (voire Morley) que de nombreuses propriétés d'une théorie de rang fini sont reflétées par les objets minimaux vivant au sein de cette théorie (les ensembles fortement

minimaux et les types minimaux). L'étude de ces types minimaux a conduit Zilber à isoler certaines propriétés de la notion de dimension qui leur est naturellement associée et à les classer selon ces dernières. De façon informelle, la notion de dimension se comporte ou bien comme la cardinalité dans un ensemble infini sans structure, ou bien comme la dimension linéaire dans un espace vectoriel, ou bien comme le degré de transcendance dans un corps algébriquement clos. On dit alors respectivement que le type minimal est trivial, localement modulaire (non trivial) ou non localement modulaire. La perspective apportée par cette trichotomie est caractéristique de l'approche modèle-théorique des théories stables [HZ96] et en particulier des corps différentiellement clos.

Une autre idée centrale de la théorie des modèles est l'étude des relations entre deux ensembles définissables (ou deux types) d'une même théorie stable T ; les cas extrêmes étant respectivement la (presque)-internalité d'un type dans un autre et l'orthogonalité entre deux types stationnaires. Intuitivement, deux types stationnaires sont orthogonaux, lorsqu'ils sont sans relation dans la théorie T et le demeurent après toute extension des paramètres, ou autrement dit après tout changement de base.

L'un des résultats les plus significatifs, notamment pour les applications, de la théorie des modèles des corps différentiellement clos est la description par Hrushovski et Sokolovic dans [HS96] des types non localement modulaires dans un corps différentiellement clos (\mathcal{U}, δ_U) comme l'ensemble des types minimaux non-orthogonaux au type générique du corps des constantes $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{U} \mid \delta_U(x) = 0\}$. Ce résultat décrit ainsi le corps des constantes d'un corps différentiellement clos comme l'unique ensemble fortement minimal non localement modulaire, modulo non-orthogonalité.

Dans cet article, on s'intéresse aux interactions entre cette approche modèle-théorique des équations différentielles algébriques et des méthodes classiques d'étude des équations différentielles ordinaires. Nos résultats s'appliquent notamment au flot géodésique associé à certaines variétés algébriques réelles, munies d'une structure riemannienne algébrique. Dans le cas d'une sous-variété V de \mathbb{R}^n munie de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n , ils prennent la forme suivante :

Théorème A. *Soit V un sous-ensemble algébrique réel de l'espace euclidien \mathbb{R}^n compact, connexe et lisse.*

Le système (S) d'équations différentielles décrivant le mouvement d'un point matériel dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , d'énergie fixée, astreint à se déplacer sans frottement le long de la sous-variété V est un système irréductible d'équations différentielles algébriques.

Si la restriction à V de la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n est à courbure sectionnelle strictement négative, alors le type générique du système (S) est orthogonal aux constantes.

Ce théorème peut être entendu comme une version modèle-théorique des résultats classiques de "non-intégrabilité" pour les équations géodésiques unitaires en courbure strictement négative [Ano67]. Il est vraisemblable qu'une forme plus forte de cet énoncé est en fait valable et que le type générique (des équations différentielles algébriques) du flot géodésique d'une variété riemannienne algébrique réelle compacte à courbure sectionnelle strictement négative est un type minimal. Malheureusement, ce résultat semble hors d'atteinte par les méthodes développées dans ce texte.

Dans [NP14], Nagloo et Pillay établissent que l'ensemble définissable associé aux équations de Painlevé (à paramètres génériques) est un ensemble fortement minimal trivial. De même, Freitag et Scanlon montrent dans [FS14] que l'ensemble défini par l'équation différentielle minimale d'ordre 3 vérifiée par la fonction j est fortement minimal et trivial. Dans ces deux cas, leurs démonstrations s'appuient sur des propriétés spécifiques des solutions des équations différentielles considérées, établies respectivement par Umemura et Watanabe [UW97] ainsi que Nishioka [Nis89], qui n'admettent pas d'analogue pour les équations différentielles de la mécanique classique. Il nous a donc fallu développer un critère d'orthogonalité aux constantes qui soit applicable aux équations géodésiques d'une sous-variété algébrique de \mathbb{R}^n .

Comme toutes les équations différentielles (algébriques) issues de la mécanique classique, ces équations géodésiques sont définies sur le corps \mathbb{R} (muni de la dérivation triviale) et possèdent une structure

hamiltonienne. Une première conséquence de cette structure hamiltonienne est l'existence d'une intégrale première rationnelle donnée par la conservation de l'énergie, qui permet de "témoigner" (de façon élémentaire) de la non-orthogonalité aux constantes. Lorsque nous étudierons ces systèmes hamiltoniens, nous nous restreindrons donc à travailler sur les lignes de niveaux de cette intégrale première, c'est-à-dire à énergie fixée (comme dans le Théorème A).

Pour les équations hamiltoniennes, on a une compréhension très précise de la dynamique réelle de leurs solutions que l'on décrit maintenant. Parmi les systèmes hamiltoniens, on trouve ceux qui sont complètement (algébriquement) intégrables, c'est-à-dire qui possèdent un système complet d'intégrales premières rationnelles en involution. C'est le cas, par exemple, des équations géodésiques de la sphère \mathbb{S}^2 plongée dans \mathbb{R}^3 (et plus généralement, de toute surface algébrique de révolution). Dans ce cas, la dynamique réelle est particulièrement simple car les orbites sont astreintes à se déplacer sur des tores invariants. Pour de petites perturbations d'un système hamiltonien complètement intégrable, le théorème KAM (voir [Bos86]) montre que cette image dynamique est préservée pour le système perturbé *en dehors des résonances*. Néanmoins, en 1899 donc bien avant le théorème KAM, Poincaré [Poi57] avait déjà remarqué que pour certaines perturbations, la dynamique réelle *au voisinage des résonances* était de nature contraire – ergodique – et que ce caractère ergodique était la source de résultats de non-intégrabilité analytique pour le système considéré (voir aussi [MR99] pour une présentation moderne de ces résultats).

Le critère d'orthogonalité aux constantes sur lequel s'appuie notre démonstration du Théorème A est une variante modèle-théorique des arguments de non-intégrabilité *à la Poincaré*, reposant sur la complexité de la dynamique topologique réelle des équations différentielles considérées.

Théorème B. *Soient X une variété absolument irréductible sur \mathbb{R} et v un champ de vecteurs rationnel sur X . On note (M, ϕ) le flot régulier réel de (X, v_X) . Supposons qu'il existe une partie compacte K de M , Zariski-dense dans X et invariante par le flot ϕ .*

Si $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$ est faiblement topologiquement mélangeant alors le type générique de (X, v) est orthogonal aux constantes.

Par définition, $M = X(\mathbb{R}) \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v))$ est la variété analytique réelle obtenue en retirant à $X(\mathbb{R})$ les singularités de X ainsi que les points où le champ de vecteurs rationnel v n'est pas défini. Le champ de vecteurs v induit alors un champ de vecteurs analytique sur M et (M, ϕ) est le flot réel analytique de ce champ de vecteurs analytique. La restriction de ce flot à toute partie compacte invariante K de M est alors un flot complet. Ce flot est dit faiblement topologiquement mélangeant si tous ses produits sont topologiquement transitifs (voir la partie 3.2 pour des formulations équivalentes de cette condition).

On remarquera que nous nous sommes affranchis de l'hypothèse hamiltonienne et que le Théorème B traite plus généralement d'équations différentielles algébriques dont la dynamique réelle est suffisamment sauvage (faiblement mélangeante) sur des régions compactes invariantes Zariski-dense.

Le cas des équations géodésiques en courbure strictement négative est certes hamiltonien mais n'est pas obtenu par perturbation d'un système complètement intégrable. Aussi, le théorème KAM ne donne aucune information sur sa dynamique. Les travaux d'Anosov [Ano67] sur les flots géodésiques en courbure négative et de ses successeurs ([Cou04], [Dal99]) montrent en fait que sa dynamique est (au contraire des systèmes complètement intégrables) topologiquement mélangeante sur l'ensemble tout entier de ses points réels. En particulier, le Théorème A est une conséquence immédiate du Théorème B et de l'étude de la dynamique des flots géodésiques en courbure strictement négative.

Cet article et le suivant sont organisés de la manière suivante. Le premier article est consacré à la démonstration du Théorème B. Pour que ce texte soit accessible aussi bien aux théoriciens des modèles qu'aux spécialistes de la dynamique des équations différentielles, nous avons essayé de donner une présentation autonome des résultats que nous utilisons. La première partie est consacrée à une exposition des résultats classiques de théorie des modèles autour de l'orthogonalité aux constantes. La troisième partie se concentrera sur l'aspect dynamique de l'étude des équations différentielles et la preuve du Théorème B, tandis que la deuxième partie est consacrée au formalisme des D -variétés

et à la démonstration d'un critère d'orthogonalité aux constantes dans ce formalisme : ce dernier jouera un rôle "d'intermédiaire" entre les approches modèle théoriques et dynamiques des équations différentielles qui font l'objet des première et troisième partie.

Dans le second article, nous démontrons le Théorème A. Dans une première partie, nous étudierons les variétés algébriques réelles munies d'une structure riemannienne algébrique. Nous montrerons en particulier que sur une variété lisse compacte, l'ensemble des métriques algébrisables est dense dans l'espace des métriques muni de la topologie de la convergence uniforme pour les métriques et toutes leurs dérivées. Nous construirons ainsi une large classe d'exemples de variétés riemanniennes réelles algébriques à courbure strictement négative. Une seconde partie sera consacrée à la preuve du Théorème A et de ses généralisations. Pour cela, nous nous appuierons sur le Théorème B et sur les propriétés dynamiques des flots géodésiques en courbure strictement négative.

Les résultats de cet article constituent une partie de ma thèse de doctorat, réalisée sous la direction de Jean-Benoît Bost (Orsay) et de Martin Hils (Paris VII – Münster). Outre mes directeurs de thèse, je tiens à remercier Elisabeth Bouscaren et Zoe Chatzidakis pour leurs précieuses remarques sur le contenu présenté dans ce texte, lors des exposés que j'ai donnés à Paris VII et à Orsay.

TABLE DES MATIÈRES

1. Théorie des modèles des corps différentiels	4
1.1. Rang de Lascar et géométrie des types minimaux	5
1.2. Orthogonalité dans une théorie ω -stable	8
1.3. Corps différentiellement clos	12
2. D -variétés et ensembles définissables associés	15
2.1. D -schémas	16
2.2. Ensemble définissable associé à une D -variété	19
2.3. Un premier critère d'orthogonalité aux constantes	22
3. Un critère d'orthogonalité aux constantes pour les D -variétés réelles	24
3.1. Des D -variétés réelles aux flots réels	24
3.2. Flots topologiquement transitifs et topologiquement mélangeants	29
3.3. Le critère d'orthogonalité aux constantes	32
Références	35

1. THÉORIE DES MODÈLES DES CORPS DIFFÉRENTIELS

Nous présentons les principaux outils de théorie de la stabilité qui concernent l'étude des types de rang fini dans une théorie stable. Le principal exemple qui nous intéresse est celui des équations différentielles ordinaires dans un corps différentiellement clos. Aussi, le contexte choisi est celui des théories ω -stables.

Dans la première section, nous rappelons la définition du rang de Lascar et sa relation avec le rang de Morley, avant de présenter la trichotomie pour les types minimaux. Dans la deuxième section, nous nous concentrons sur la notion d'orthogonalité entre types stationnaires. Nous montrons comment elle permet de construire un dévissage des types de rang fini en types minimaux. Enfin, dans la troisième section, nous exposons les résultats spécifiques aux corps différentiellement clos.

Le lecteur théoricien des modèles pourra se contenter de commencer directement par la deuxième partie de ce texte. Pour le lecteur plus novice avec la théorie des modèles, nous supposons néanmoins une familiarité avec les résultats élémentaires de théories des modèles (formules, types, élimination des quantificateurs, élimination des imaginaires) et de théorie de la stabilité (rang et degré de Morley, déviation et indépendance, types définissables, base canonique d'un type). La lecture des chapitres 1-3 et 5-8 de [TZ12] est suffisante à la compréhension de cette partie.

1.1. Rang de Lascar et géométrie des types minimaux. On fixe un langage et T une -théorie complète et ω -stable qui élimine les imaginaires.

1.1.1. *Le rang de Lascar.*

Définition 1.1.1. Soit $(\mathcal{P}, <)$ un ensemble partiellement ordonné (par un ordre strict). On définit inductivement sur les ordinaux, le rang de fondation RF de l'ordre partiel $(\mathcal{P}, <)$:

- $\text{RF}(p) \geq 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.
- $\text{RF}(p) \geq \beta + 1$ s'il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que $q < p$ et $\text{RF}(q) \geq \beta$.
- Si α est un ordinal limite alors $\text{RF}(p) \geq \alpha$ si $\text{RF}(p) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$.

On dit que $p \in \mathcal{P}$ est *<-rangé* s'il existe un ordinal α_0 avec $\text{RF}(p) \not\geq \alpha_0$. On appelle alors *rang de fondation* de p , l'ordinal

$$\text{RF}(p) = \max\{\alpha \leq \alpha_0 \mid \text{RF}(p) \geq \alpha\}.$$

Notation 1.1.2. On fixe κ un cardinal infini. Soit $\mathfrak{M} \models T$ un modèle de T . On dit qu'un ensemble de paramètres $A \subset \mathfrak{M} \models T$ est *petit* si $|A| < \kappa$.

Pour les besoins de ce texte, on peut se restreindre au cas où $\kappa = \aleph_0$ est le cardinal dénombrable. Dans ce cas, les ensembles de paramètres petits sont simplement les ensembles finis.

Construction 1.1.3. Soit \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit \mathcal{P}_n comme l'ensemble des couples (A, p) où $A \subset M$ est un ensemble de paramètres petit et $p \in S_n(A)$ est un type à paramètres dans A .

On définit un ordre partiel sur \mathcal{P}_n en posant :

$$(B, q) < (A, p) \text{ si et seulement si } A \subset B \text{ et } q \text{ est une extension déviante de } p.$$

Le rang de fondation associé à cet ordre partiel est appelé *rang de Lascar* et noté $\text{RU}(p)$ pour $p \in S_n(A)$. Si $A \subset M$ est un ensemble de paramètres petit et $a \in M^n$, on note $\text{RU}(a/A) = \text{RU}(\text{tp}(a/A))$.

Remarque 1.1.4. Comme la théorie T est ω -stable, si $A \subset M$ est un ensemble de paramètres petit alors on peut associer à tout type partiel $\pi(x)$ au dessus de A , un ordinal noté $\text{RM}(\pi(x))$ et appelé rang de Morley de $\pi(x)$ [TZ12, Chapitre 5].

Proposition 1.1.5. *Le rang de Lascar RU ne dépend pas du modèle κ -saturé choisi. De plus, il vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour tout ensemble A de paramètres et tout type $p \in S_n(A)$, $\text{RU}(p) \leq \text{RM}(p)$. En particulier, tout type est rangé pour le rang de Lascar dans une théorie ω -stable.*
- (ii) *Si $a, b \in M^n$ et $A \subset M$ est un ensemble de paramètres tels que $\text{RU}(a, b/A) < \omega$ alors*

$$\text{RU}(a, b/A) = \text{RU}(a/A) + \text{RU}(b/A, a).$$

Par construction, le rang de Lascar RU est le plus petit rang qui témoigne de la déviation. Comme le rang de Morley témoigne de la déviation dans une théorie ω -stable, la propriété (i) suit. La propriété (ii) est conséquence de [TZ12, Exercice 8.6.5] pour les ordinaux finis.

Exemple 1.1.6. Dans la théorie des corps algébriquement clos (et plus généralement dans toute théorie fortement minimale), le rang de Morley et le rang de Lascar coïncident [Pil96, Chapitre 1, Lemme 5.12].

Remarque 1.1.7. En général, le rang de Lascar et le rang de Morley peuvent différer dans une théorie ω -stable. Dans l'article [HS99], Hrushovski et Scanlon montrent que ces deux rangs peuvent être différents pour la théorie \mathbf{DCF}_0 des corps différentiellement clos.

Pour illustrer la remarque précédente, on donne un exemple immédiat d'une théorie ω -stable et d'un type pour lequel le rang de Morley et le rang de Lascar diffèrent.

Exemple 1.1.8. Soient $\mathcal{L}_\omega = \{D_i \mid i \in \omega\}$ composé de relations unaires D_i et T_ω la théorie dans le langage \mathcal{L}_ω axiomatisée par : Les $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des ensembles infinis disjoints.

Assertion. La théorie T_ω élimine les quantificateurs dans le langage \mathcal{L}_ω .

L'assertion précédente se vérifie de façon immédiate à l'aide de la méthode du va-et-vient.

Soient \mathfrak{M} un modèle de T_ω et $A \subset M$ un ensemble de paramètres. Par élimination des quantificateurs, on obtient la description suivante de $S_1(A)$:

- (i) Les types réalisés dans A .
- (ii) Un unique type $p_\omega|A \in S_1(\emptyset)$ non réalisé dans A et vérifiant $x \notin D_i$ pour tout $i \in \omega$.
- (iii) Pour tout $i \in \omega$, l'unique type générique $p_i|A \in S_1(A)$ de l'ensemble fortement minimal D_i .

En particulier, si A est dénombrable alors $S_1(A)$ aussi. La théorie T_ω est donc une théorie ω -stable.

Assertion. Notons $p_\omega = p_\omega|A \in S_1(\emptyset)$. Le type p_ω vérifie $\text{RU}(p_\omega) = 1$ et $\text{RM}(p_\omega) = 2$.

En effet, les seules extensions de p_ω à un ensemble $A \subset M$ de paramètres sont les types réalisés dans A et $p_\omega|A$. On en déduit que p_ω est un type stationnaire et $\text{RU}(p_\omega) = 1$.

Montrons que $\text{RM}(p_\omega) = 2$. Soit $\phi(x) \in \mathcal{P}(x)$ une formule. Par compacité, il existe $N \in \omega$ tel que pour tout $n \geq N$

$$T_\omega \models x \in D_n \implies \phi(x)$$

On en déduit que $\phi(x)$ est impliquée par une infinité de formules fortement minimales disjointes et donc que $\text{RM}(\phi(x)) \geq 2$. Par continuité du rang de Morley, on en déduit que $\text{RM}(p_\omega) \geq 2$.

Réciproquement, pour tout ensemble de paramètres $A \subset M$, tous les types $S_1(A)$ différents de $p_\omega|A$ sont de rang de Morley ≤ 1 . On en déduit que $\text{RM}(p_\omega) \leq 2$.

1.1.2. Types minimaux et prégéométrie.

Notation 1.1.9. Soient $\mathfrak{M} \models T$ un modèle κ -saturé de T et $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit. On rappelle qu'un type $p \in S(A)$ est dit *stationnaire* s'il admet une unique extension non déviante à toute extension de paramètres $A \subset B$. Pour toute extension $A \subset B$ de paramètres, on note $p|B \in S(B)$ l'unique extension non déviante de p à B .

Définition 1.1.10. Soient \mathfrak{M} un modèle de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $p \in S_n(A)$ un type stationnaire. On dit que p est *minimal* si $\text{RU}(p) = 1$.

Un type stationnaire $p \in S_n(A)$ est donc minimal si et seulement s'il est non algébrique et toutes ses extensions déviantes sont algébriques.

Construction 1.1.11. Soit \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit et $q \in S_n(A)$ un type stationnaire minimal.

Considérons $Q = q(M)$ l'ensemble des réalisations de q dans le modèle \mathfrak{M} de T et l'opérateur de clôture $\text{cl} : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ défini pour tout $B \subset Q$ par :

$$\text{cl}(B) = \text{acl}(B \cup A) \cap Q.$$

Lemme 1.1.12. L'opérateur $\text{cl} : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $B \subset Q$, $B \subset \text{cl}(B)$ et $\text{cl}(\text{cl}(B)) = \text{cl}(B)$.
- (ii) L'opérateur cl est monotone i.e $\text{cl}(B) \subset \text{cl}(B')$ dès que $B \subset B' \subset Q$.
- (iii) Pour tout $B \subset Q$ et tout $b \in Q$ tels que $b \in \text{cl}(B)$, il existe $B_0 \subset B$ fini tel que $b \in \text{cl}(B_0)$.
- (iv) Pour tout $B \subset Q$ et tous $a, b \in Q$, on a

$$a \in \text{cl}(B \cup b) \setminus \text{cl}(B) \iff b \in \text{cl}(B \cup a) \setminus \text{cl}(B).$$

Les propriétés (i) à (iii) sont immédiates. La propriété (iv) est appelée *propriété de l'échange* est quant à elle spécifique aux types minimaux. C'est une simple conséquence de la propriété (ii) de la proposition 1.1.5 : pour tous $a, b \notin \text{cl}(B)$, on a :

$$a \in \text{cl}(B \cup b) \iff \text{RU}(a/B, b) = 0 \iff \text{RU}(a, b/B) = 1 \iff \text{RU}(b/B, a) = 0 \iff b \in \text{cl}(B \cup a).$$

où la deuxième et la troisième équivalences utilisent l'additivité du rang de Lascar.

Définition 1.1.13. Un couple (S, cl) où S est un ensemble et $\text{cl} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ est un opérateur de clôture vérifiant les propriétés du lemme 1.1.12 est appelée une *pré géométrie combinatoire*.

Si (S, cl) est une pré géométrie combinatoire et $C \subset S$ est un sous-ensemble, l'opérateur de clôture défini pour $A \subset S$ par

$$\text{cl}_C(A) = \text{cl}(C \cup A)$$

définit une nouvelle pré géométrie combinatoire (S, cl_C) appelée *pré géométrie combinatoire localisée en C* .

Définition 1.1.14. Soient (S, cl) une pré géométrie combinatoire et $A \subset S$. On appelle *dimension de A* et on note $\dim(A)$, le cardinal d'une cl -base de $\text{cl}(A)$, i.e le cardinal d'une famille $A_0 \subset A$ qui est génératrice ¹ et libre ²

1.1.3. Modularité et trivialité.

Définition 1.1.15. Soit \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit et $q \in S_n(A)$ un type stationnaire minimal. On note (Q, cl) la pré géométrie associée par la construction 1.1.11. On dit que :

- (i) Le type q est *modulaire* si la pré géométrie (Q, cl) est modulaire i.e. pour tout $B, C \subset Q$,
$$\dim(B) + \dim(C) = \dim(B \cup C) + \dim(\text{cl}(B) \cap \text{cl}(C)).$$
- (ii) Le type q est *localement modulaire* s'il existe un ensemble de paramètres petit $C \subset Q$ tel que la pré géométrie localisée (Q, cl_C) soit modulaire.
- (iii) Le type $q \in S_n(A)$ est *trivial* si la pré géométrie associée est dégénérée, i.e si pour tout sous-ensemble $B \subset Q$, on a

$$\text{cl}(B) = \bigcup_{b \in B} \text{cl}(b).$$

On dit que q est *non localement modulaire* si q n'est pas localement modulaire.

Exemple 1.1.16. Soit k un corps et (E, V) un espace affine infini sur k où V désigne la partie linéaire de E . L'opérateur de clôture cl qui à un sous-ensemble $B \subset E$, associe le plus petit sous-espace affine de E contenant B définit une pré géométrie (E, cl) . On vérifie facilement que cette pré géométrie est localement modulaire mais non-modulaire. [Pil96, Chapitre 2, Exemple 1.7]

La propriété de modularité locale est donc en général plus faible que la propriété de modularité.

Théorème 1.1.17 (Zilber, Hrushovski). *Soit \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et D un ensemble A -définissable fortement minimal dont le type générique $q_D \in S(A)$ est localement modulaire.*

- (i) *La structure induite par \mathfrak{M} sur D n'interprète aucun corps infini.*
- (ii) *Le type $q_D \in S_n(A)$ est trivial si et seulement si la structure induite par \mathfrak{M} sur D n'interprète aucun groupe infini.*

La propriété (i) est conséquence du fait que tout corps interprétable dans une théorie ω -stable est algébriquement clos [Poi01, Théorème 3.1] et qu'un ensemble fortement minimal interprétant un corps algébriquement clos est non localement modulaire [Pil96, Chapitre 2, Proposition 2.6]. La propriété (ii) est donnée par [Pil96, Chapitre 5, Théorème 1.1].

Remarque 1.1.18. Le théorème 1.1.17 est valide dans le cadre plus général des types minimaux (voir [Pil96]). Sa formulation est néanmoins légèrement plus complexe car la notion de structure induite sur l'ensemble des réalisations d'un type est plus subtile que celle de structure induite sur un ensemble définissable.

¹c'est-à-dire $\text{cl}(A_0) = \text{cl}(A)$.

²c'est-à-dire $\forall a_0 \in A_0, a_0 \notin \text{cl}(A_0 \setminus \{a_0\})$.

Remarque 1.1.19. La conjecture de trichotomie consiste à affirmer que la propriété (i) est équivalente à la propriété "être localement modulaire". Elle a été réfutée par Hrushovski dans [Hru93] en exhibant un ensemble fortement minimal non localement modulaire qui n'interprète aucun groupe infini.

Néanmoins, cette conjecture reste valable dans de nombreux contextes parmi lesquels on trouve les géométries de Zariski [HZ96] et en particulier les corps différentiellement clos [HS96].

1.2. Orthogonalité dans une théorie ω -stable. On adopte les mêmes notations que dans la partie précédente. On fixe un langage, T une ω -théorie complète et ω -stable qui élimine les imaginaires et κ un cardinal infini.

1.2.1. Orthogonalité et principe de réflexivité de Shelah.

Notation 1.2.1. Soient $\mathfrak{M} \models T$, a, b des uplets de M et $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit, on notera $a \downarrow_A b$ pour désigner que a et b sont indépendants au dessus de A , c'est-à-dire que $\text{tp}(a/A, b)$ est une extension non-déviant de $\text{tp}(a/A)$.

Cette relation vérifie les propriétés usuelles d'une relation d'indépendance [TZ12, Théorème 8.5.5]. En particulier, elle est symétrique, i.e. $a \downarrow_A b$ si et seulement si $b \downarrow_A a$.

Définition 1.2.2. Soient \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit et $p, q \in S(A)$ deux types sur A . On dit que p et q sont *faiblement orthogonaux* et on note $p \perp^a q$ si pour toutes réalisations $a, b \in M$ de p et q respectivement, on a $a \downarrow_A b$.

Par symétrie de la relation d'indépendance dans une théorie ω -stable, la notion d'orthogonalité faible est une relation symétrique.

Définition 1.2.3. Soient \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A, B \subset M$ des ensembles de paramètres petits, $p \in S(A)$ et $q \in S(B)$ deux types stationnaires. On dit que p et q sont *orthogonaux* et on note $p \perp q$ si pour tout ensemble de paramètres $C \supset A \cup B$, les extensions non-déviantes respectives $p|C$ et $q|C$ de p et q à C sont faiblement orthogonales.

Notation 1.2.4. Soient $p, q \in S(A)$ deux types stationnaires. On appelle *produit tensoriel* de p et q , le type complet à paramètres dans A

$$p \otimes q = \text{tp}(a, b/A)$$

où $a \models p$ réalise p et $b \models q|A$, a réalise l'unique extension non déviant de q à A , a . De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p^{\otimes n} = p \otimes \dots \otimes p$ le produit tensoriel de p avec lui même n fois.

Nous utiliserons la conséquence suivante du principe de réflexivité de Shelah pour la notion d'orthogonalité.

Proposition 1.2.5 ([Pil96, Chapitre 1, Lemme 4.3.1]). *Soient \mathfrak{M} un modèle de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $p, q \in S(A)$ deux types stationnaires. On a équivalence entre :*

- (i) *Les types p et q sont orthogonaux.*
- (ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, les types $p^{\otimes n}$ et $q^{\otimes m}$ sont faiblement orthogonaux.*

1.2.2. Types stationnaires de rang de Lascar fini et orthogonalité. Pour les types minimaux, la relation de non-orthogonalité définit une partition en classes d'équivalence. De plus, cette partition est compatible avec les notions de types localement modulaires et de types triviaux introduites dans la définition 1.1.15

Proposition 1.2.6 ([Pil96, Chapitre 2, Remarque 2.10]). *Soit \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T . La relation "être non-orthogonal" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des types stationnaires minimaux à paramètres dans M . De plus, si p est un type minimal stationnaire localement modulaire (resp. trivial) alors tout type dans sa classe d'équivalence a la même propriété.*

Si $p \in S(A)$ est un type minimal, on note $[p]$ sa classe d'équivalence pour la relation de non-orthogonalité.

La relation de non-orthogonalité cesse d'être une relation d'équivalence lorsqu'on ne se restreint plus aux types minimaux dès que la théorie T possède deux types minimaux orthogonaux. Néanmoins, elle permet de définir un dévissage des types p de rang de Lascar fini en types minimaux.

Lemme 1.2.7 ([Pil96, Chapitre 2, Lemme 2.5.1]). *Soient \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres petit et $p \in S_n(A)$ un type de rang RU fini. Il existe une extension $A \subset B$ de paramètres et un type stationnaire minimal $q \in S(B)$ non-orthogonal à p .*

Proposition 1.2.8. *Soient \mathfrak{M} un modèle de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $p \in S_n(A)$ un type stationnaire de rang RU fini égal à $r \in \mathbb{N}$. Il existe une suite d'extensions de paramètres $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$, une suite d'extension $p \subset p_1 \subset p_2 \subset \dots \subset p_r$ où $p_i \in S(A_i)$ est un type stationnaire et des types minimaux stationnaires $q_i \in S(A_i)$ vérifiant*

- (i) *Pour tout $i \leq r$, le rang de Lascar $\text{RU}(p_i)$ de p_i est $r + 1 - i$. En particulier, le type p_1 est une extension non déviante de p et p_r est un type minimal.*
- (ii) *Pour $i = r$, on a $p_r = q_r$ et pour tout $1 \leq i < r$, il existe des réalisations $a_i \models p_i$ et $b_i \models q_i$ telles que $b_i \in \text{acl}(A_i, a_i)$ et p_{i+1} est une extension stationnaire non déviante à A_{i+1} de $\text{tp}(a_i/A_i, b_i)$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le rang de Lascar $r = \text{RU}(p) \in \mathbb{N}$ de p .

Pour $r = 1$, il suffit de poser $A_1 = A$ et $p_1 = q_1 = p$.

Supposons le résultat montré pour les types de rang de Lascar $r \in \mathbb{N}$. Considérons $p \in S(A)$ un type stationnaire de rang de Lascar $r + 1$.

D'après le lemme 1.2.7, il existe un ensemble $B \subset M$ de paramètres et $q \in S(B)$ un type stationnaire minimal non orthogonal à p . Considérons $C \supset A \cup B$ un ensemble de paramètres et des réalisations $a \models p|C$ et $b \models q|C$ vérifiant $a \not\perp_C b$.

Le type $\text{tp}(b/C)$ étant minimal, on en déduit que $b \in \text{acl}(C, a)$. On pose alors $A_1 = C$, $q_1 = q|C$, $p_1 = p|C$. Par additivité du rang de Lascar (Proposition 1.1.5), le type $p = \text{tp}(a/b, C)$ est de rang de Lascar $r \in \mathbb{N}$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à une extension stationnaire de $p = \text{tp}(a/b, C)$. \square

Remarque 1.2.9. Les données $\mathcal{A} = ((A_i)_{i \leq r}, (p_i)_{i \leq r}, (q_i)_{i \leq r})$ où $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$ est une extension de paramètres, et de types stationnaires $p_i, q_i \in S(A_i)$ dont l'existence est assurée par la proposition 1.2.8 est appelée *une analyse du type $p \in S(A)$ par les types minimaux q_1, \dots, q_r* .

On note alors $[p]_{\mathcal{A}} = \{[q_1], \dots, [q_r]\}$ l'ensemble des classes de non-orthogonalité des types minimaux intervenant dans l'analyse de p .

Proposition 1.2.10. *Soient \mathfrak{M} un modèle de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $p \in S_n(A)$ un type stationnaire de rang RU fini égal à $r \in \mathbb{N}$. Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux analyses de p alors $[p]_{\mathcal{A}} = [p]_{\mathcal{A}'}$.*

Plus précisément, pour toute analyse \mathcal{A} de p , on a

$$[p]_{\mathcal{A}} = \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à une extension de } p\}.$$

Si $p \in S(A)$ est un type de rang de Lascar fini, on notera $[p] = [p]_{\mathcal{A}}$ pour toute analyse \mathcal{A} de p dont l'existence est assurée par la proposition 1.2.8 et qui est bien défini d'après la proposition 1.2.10.

Démonstration. La deuxième partie de la proposition implique la première. La condition (ii) de la proposition 1.2.8 montre que :

$$[p]_{\mathcal{A}} \subset \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à une extension de } p\}.$$

Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque : Considérons \mathcal{A} une analyse de p et un type $q \in S(B)$ minimal orthogonal à $[p]_{\mathcal{A}}$ (i.e. orthogonal à tous les éléments de $[p]_{\mathcal{A}}$). Soit $A \subset C$ une extension de paramètres et $\hat{p} \in S(C)$ une extension de p . Montrons que q est orthogonal à \hat{p} .

D'après [Pil96, Chapitre 8, Lemme 1.2(i)], il existe une analyse $\hat{\mathcal{A}}$ de \hat{p} avec

$$[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}} \subset [p]_{\mathcal{A}}.$$

Par hypothèse, le type q est orthogonal à tous les éléments de $[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}}$ et donc d'après [Pil96, Chapitre 8, Lemme 1.2(iv)], le type q est orthogonal à tous les types analysables dans $[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}}$ et en particulier à \hat{p} . \square

Exemple 1.2.11. Soient \mathfrak{M} un modèle de T , $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $p_1, \dots, p_n \in S(A)$ des types minimaux stationnaires. On vérifie facilement que

$$[p_1 \otimes \dots \otimes p_n] = \{[p_1], \dots, [p_n]\}.$$

En particulier, on a le renforcement suivant de la proposition 1.2.10 pour le type $p = p_1 \otimes \dots \otimes p_n$:

$$[p]_{\mathcal{A}} = \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à } p\}.$$

1.2.3. Un contre-exemple. On montre que la proposition 1.2.10 est optimale en construisant un exemple de type $p \in S(A)$ où

$$\{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à } p\} \subsetneq [p].$$

Exemple 1.2.12. Soit k un corps infini. Considérons le langage $\mathcal{L}_k = \{0, +, -, \lambda \in k\}$ des k -espaces vectoriels qui est l'enrichissement du langage des groupes par des symboles de fonctions unaires pour chaque élément du corps k , désignant la multiplication scalaire.

La théorie T_k des espaces vectoriels non triviaux sur le corps k est une théorie complète du premier ordre dans le langage \mathcal{L}_k qui élimine les quantificateurs dans ce langage [TZ12, Théorème 3.3.3]. Une analyse directe des formules sans quantificateurs dans le langage \mathcal{L}_k montre que la théorie T_k est fortement minimale. De plus, si V est un modèle de T_k et si $A \subset V$ est un sous-ensemble de paramètres alors $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \text{Vect}(A)$.

En particulier, la dimension de la prégéométrie combinatoire associée par la construction 1.1.11 coïncide avec la dimension linéaire. On en déduit que T_k est une théorie fortement minimale modulaire.

Construction 1.2.13. On note $\mathcal{L}_k^2 = \mathcal{L}_k \cup \{W\}$ l'enrichissement du langage \mathcal{L}_k par un prédicat unaire W et T_k^2 la théorie des paires d'espaces vectoriels dans langage \mathcal{L}_k^2 i.e. la théorie dont les modèles sont les couples $(V, W) \models T_k^2$ tels que

$$W \subsetneq V \text{ et } W \models T_k \text{ et } V \models T_k.$$

Proposition 1.2.14. La théorie T_k^2 est une théorie complète qui élimine les quantificateurs dans le langage \mathcal{L}_k^2 .

La proposition se démontre facilement à l'aide de la méthode du va-et-vient. Cependant, ce n'est pas une conséquence formelle du fait que la théorie T_k admette l'élimination des quantificateurs dans le langage \mathcal{L}_k . Par exemple, la théorie des paires de corps algébriquement clos n'élimine pas les quantificateurs dans le langage des paires d'anneaux.

Démonstration. Les modèles de T_k^2 admettent $(0, 0)$ comme sous-structure commune. La complétude de la théorie T_k^2 est donc conséquence de l'élimination des quantificateurs. Remarquons que si $\mathfrak{M} = (V, W)$ et $\mathfrak{M}' = (V', W')$ sont deux modèles de T_k^2 , les \mathcal{L}_k^2 -morphisms partiels

$$f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$$

sont les applications $f : A \longrightarrow V'$ qui se prolongent en applications k -linéaires

$$\bar{f} : \text{Vect}(A) \longrightarrow V' \text{ telle que } \bar{f}(\text{Vect}(A) \cap W) = \bar{f}(\text{Vect}(A)) \cap W'.$$

On note $\kappa = |k|$. Considérons $\mathfrak{M} = (V, W) \models T_k$ un modèle de cardinal κ de T_k^2 et $\mathfrak{M}' = (V', W') \models T_k^2$ un modèle κ^+ -saturé. D'après la méthode du va-et-vient, il suffit de vérifier que tout \mathcal{L}_k^2 -morphisme partiel $f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ s'étend en un \mathcal{L}_k^2 -plongement de \mathfrak{M} dans \mathfrak{M}' .

Soit $f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ un \mathcal{L}_k^2 -morphisme partiel. D'après la remarque précédente, f se prolonge uniquement en un \mathcal{L}_k^2 -morphisme partiel $f : \text{Vect}(A) \subset (V, W) \longrightarrow (V', W')$. Considérons $x \in V \setminus \text{Vect}(A)$. On veut étendre le morphisme partiel f à x . On a deux cas :

1^{er} cas : Supposons que $x \notin \text{Vect}(A) + W$.

Par saturation de \mathfrak{M} , il existe $x' \notin \text{Vect}(f(A)) + W'$. Comme $x \in V \setminus \text{Vect}(A)$, l'application linéaire f se prolonge en une unique application linéaire $\bar{f} : \text{Vect}(A) \oplus k.x \rightarrow V'$ telle que $f(x) = x'$. Par construction, on a :

$$\bar{f}([\text{Vect}(A) \oplus k.x] \cap W) = f(\text{Vect}(A) \cap W) = f(\text{Vect}(A)) \cap W' = [\bar{f}(\text{Vect}(A)) \oplus k.x'] \cap W'$$

2^e cas : Supposons que $x \in \text{Vect}(A) + W$.

Considérons $a \in \text{Vect}(A)$ tel que $y = x - a \in W$. Par saturation de \mathfrak{M} , on peut choisir $y' \in W' \setminus \text{Vect}(A)$. Comme $y \in V \setminus \text{Vect}(A)$, l'application linéaire f se prolonge en une unique application linéaire $\bar{f} : \text{Vect}(A) \oplus k.y \rightarrow V'$ telle que $f(y) = y'$. Par construction, on a :

$$\bar{f}([\text{Vect}(A) \oplus k.y] \cap W) = f(\text{Vect}(A) \cap W) \oplus k.y' = f(\text{Vect}(A)) \cap W' \oplus k.y'.$$

Ceci achève la preuve de l'élimination des quantificateurs pour la théorie T_k^2 . \square

Considérons de plus la suite exacte de k -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow W \rightarrow V \xrightarrow{\pi} V/W \rightarrow 0.$$

L'ensemble V/W s'identifie alors à un ensemble définissable de la théorie $(T_k^2)^{eq}$ obtenue en adjoignant à T_k^2 ses sortes imaginaires [TZ12, Partie 8.4].

Corollaire 1.2.15. *Soit $\mathfrak{M} = (V, W)$ un modèle de T_k^2 . On a la description suivantes des formules à paramètres dans V :*

- (i) *Pour tout $A \subset V$, on a $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \text{Vect}(A)$.*
- (ii) *La structure induite par \mathfrak{M} sur W est celle d'un pur k -espace vectoriel, en particulier fortement minimale.*
- (iii) *La structure induite par \mathfrak{M}^{eq} sur V/W est celle d'un pur k -espace vectoriel, en particulier fortement minimale.*
- (iv) *Les sous-ensembles A -définissable de V sont les combinaisons booléennes de translatés de W par un élément de $\text{Vect}(A)$ et des points de $\text{Vect}(A)$.*

Démonstration. Les formules sans quantificateurs en une variable et à paramètres dans A dans le langage \mathcal{L}_k^2 sont les disjonctions finies de formules de la forme :

$$x \in W + a, x = b, \bigwedge_{i=1}^n x \notin (W + a_i) \text{ et } \bigwedge_{i=1}^n x \neq b_i$$

où $a, b, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \text{Vect}(A)$. D'après la proposition 1.2.14, toute formule de \mathcal{L}_k^2 est équivalente modulo T_k^2 à une disjonction finie des formules précédentes.

On en déduit les propriétés (ii), (iii) et (iv). Pour (i), il suffit de remarquer que parmi les formules précédentes, $x = b$ est la seule formule algébrisante. \square

Remarque 1.2.16. La condition (iv) montre que V est de rang de Morley 2 et de degré de Morley 1 et possède donc un unique type (stationnaire) de rang de Morley 2 noté $p_V \in S_1(\emptyset)$.

La condition (iv) montre aussi que les types (fortement) minimaux p_W et $p_{V/W}$ génériques de W et V/W respectivement sont orthogonaux. Remarquons de plus que ces deux types sont modulaires.

Lemme 1.2.17. *Dans la théorie $(T_k^2)^{eq}$, les types $p_W \in S_1(\emptyset)$ et $p_V \in S_1(\emptyset)$ sont orthogonaux.*

Démonstration. Soit $V \models T_k^2$. Par élimination des quantificateurs dans T_k^2 , on peut décrire les extensions non déviantes de p_V et p_W à tout ensemble de paramètres $A \subset V$ de la façon suivante :

- $p_V|A$ est l'unique 1-type $q \in S_1(A)$ vérifiant

$$q(x) \vdash \pi(x) \notin \text{Vect}(\pi(A)).$$

- $p_W|A$ est l'unique 1-type $q \in S_1(A)$ vérifiant

$$q(x) \vdash x \in W \wedge x \notin \text{Vect}(A).$$

On raisonne désormais par l'absurde en supposant que p_V et p_W sont non orthogonaux. D'après la description précédente de la clôture algébrique, il existe un ensemble A de paramètres et des réalisations a, b de $p_V|A$ et $p_W|A$ respectivement tels que $b \in \text{Vect}(A, a)$.

De plus, par définition $b \notin \text{Vect}(A)$. L'opérateur Vect vérifiant la propriété de l'échange, on en déduit que

$$a \in \text{Vect}(A, b).$$

On a alors $\pi(a) \in \text{Vect}(\pi(A), \pi(b)) = \text{Vect}(\pi(A))$, ce qui contredit la description précédente du type $p_V|A$. \square

Lemme 1.2.18. *Dans la théorie $(T_k^2)^{eq}$, on a $[p_V] = \{[p_W], [p_{V/W}]\}$.*

Démonstration. Soit $b \models p_V$ une réalisation de p_V . On construit une analyse \mathcal{A} du type p_V . Remarquons d'abord que π est \emptyset -définissable et que $\pi(b) \models p_{V/W}$.

On pose donc $A_1 = \emptyset$, $p_1 = p_V$ et $q_1 = p_{V/W}$, puis $A_2 = \pi(b)$ et $q_2 = p_2 = \text{tp}(b/\pi(b))$. Comme les fibres de π sont des espaces homogènes sous l'action de W , le type p_2 est un type fortement minimal. On en déduit que :

$$[p] = [p]\mathcal{A} = \{[p_{V/W}], [q_2]\}$$

Montrons que q_2 est non orthogonal à p_W . Considérons b' réalisant $q_2 = \text{tp}(b/\pi(b))$ et vérifiant $b' \perp_{\pi(b)} b$. Par construction, on a $\pi(b) = \pi(b')$ et donc $b - b' \in W$. Comme de plus $b - b' \notin \text{dcl}(A_2, b)$, on en déduit que $b - b'$ réalise le type générique de W au dessus de A_2, b .

La relation $b - b' \in \text{dcl}(A_2, b, b')$ témoigne alors de la non-orthogonalité entre q_2 et p_W . \square

1.3. Corps différentiellement clos.

1.3.1. Définition. On rappelle qu'un corps différentiel (de caractéristique 0) est un couple (K, δ) où K est un corps de caractéristique 0 et $\delta : K \rightarrow K$ une dérivation. Dans tout le texte, on travaillera dans des corps de caractéristique 0, on parlera donc de corps différentiel pour désigner un corps différentiel de caractéristique 0.

Du point de vue syntaxique, un corps différentiel est une δ -structure où $\delta = \{0, 1, +, \cdot, -, \delta\}$ est appelé *langage des corps différentiels* vérifiant les axiomes des corps différentiels (qui sont du premier ordre dans le langage δ).

Remarque 1.3.1. Pour le langage \mathcal{L}_δ des corps différentiels, les formules sans quantificateurs à paramètres dans un corps différentiel (K, δ) sont les combinaisons booléennes d'équations différentielles algébriques, c'est-à-dire d'équations différentielles de la forme :

$$(E) : P(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0$$

où $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_r^{(0)}, \dots, X_1^{(k)}, \dots, X_r^{(k)}]$ est un polynôme.

Parmi les modèles de la théorie des corps différentiels, certains possèdent une importance particulière, ce sont les modèles existentiellement clos.

Définition 1.3.2. Soient T une théorie dans un langage \mathcal{L} et \mathfrak{M} un modèle de T . On dit \mathfrak{M} est un *modèle existentiellement clos* de T si pour toute extension de modèles $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$ de T , toute formule sans quantificateurs $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout $\bar{b} \in M^n$, on a :

$$\mathfrak{M}' \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b}) \iff \mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b}).$$

Définition 1.3.3. On appelle *corps différentiellement clos*, tout modèle existentiellement clos de la théorie des corps différentiels.

Lemme 1.3.4. *Tout corps différentiel est contenu dans un corps différentiellement clos. En particulier, il existe des corps différentiellement clos.*

La limite inductive d'une chaîne de corps différentiels

$$(K_1, \delta_1) \subset (K_2, \delta_2) \subset \dots \subset (K_n, \delta_n) \subset \dots$$

est un corps différentiel. Le lemme précédent est alors conséquence des techniques de construction standards de théorie des modèles [TZ12, Lemme 3.2.10].

Lemme 1.3.5 ([MMP06, Partie 2, lemme 1.5 et corollaire 1.7]). *Soient (K, δ) un corps différentiel, $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n)}] \setminus K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$ un polynôme et $Q \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$ un polynôme non nul. Le système d'équations différentielles algébriques*

$$(1) \quad P(y, \delta(y), \dots, \delta^n(y)) = 0 \wedge Q(y, \delta(y), \dots, \delta^{n-1}(y)) \neq 0$$

admet des solutions dans une extension différentielle de (K, δ) .

Théorème 1.3.6 (Blum). *La classe des corps différentiellement clos est axiomatisable dans le langage \mathcal{L}_δ des corps différentiels par une théorie du premier ordre. Une axiomatisation de cette théorie est donnée par :*

DCF₀^I (K, δ) est un corps différentiel (de caractéristique 0).

DCF₀^{II} Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tous polynômes $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n)}] \setminus K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$ et $Q \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$ non nul, il existe $y \in K$ tel que

$$P(y, \delta(y), \dots, \delta^n(y)) = 0 \wedge Q(y, \delta(y), \dots, \delta^{n-1}(y)) \neq 0.$$

La théorie axiomatisée par les axiomes précédents est notée **DCF₀** et appelée *théorie des corps différentiellement clos*.

Le lemme 1.3.5 montre que les corps différentiellement clos sont modèles de la théorie **DCF₀**. Le théorème est alors conséquence de [MMP06, Partie 2, Corollaire 2.5].

1.3.2. Elimination des quantificateurs et des imaginaires.

Théorème 1.3.7 ([MMP06, Partie 2, Théorème 2.4 et Théorème 3.7]). *La théorie des corps différentiellement clos **DCF₀** est complète et élimine les quantificateurs et les imaginaires dans le langage \mathcal{L}_δ des corps différentiels.*

On présente maintenant les conséquences du théorème précédent.

Définition 1.3.8. Soit (K, δ) un corps différentiel. On appelle *corps des constantes de (K, δ)* , le sous-corps de K défini par

$$K^\delta = \{x \in K \mid \delta(x) = 0\}.$$

Corollaire 1.3.9 ([MMP06, Partie 2, Lemme 5.10]). *Soit $(\mathcal{U}, \delta_\mathcal{U})$ un corps différentiellement clos. Le corps des constantes \mathcal{C} de $(\mathcal{U}, \delta_\mathcal{U})$ est un corps algébriquement clos et la structure induite par \mathcal{U} sur le sous-corps définissable \mathcal{C} est celle d'un pur corps algébriquement clos³.*

En particulier, si $(\mathcal{U}, \delta_\mathcal{U})$ est un corps différentiellement clos alors le corps des constantes $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ est un sous-ensemble définissable fortement minimal.

Définition 1.3.10. Soient $(\mathcal{U}, \delta_\mathcal{U})$ un corps différentiellement clos et $p \in S(A)$ un type à paramètres dans un sous-ensemble $A \subset \mathcal{U}$. On dit que le type p est *orthogonal aux constantes* si p est orthogonal au type générique de l'ensemble fortement minimal $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$.

Notation 1.3.11. Si $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est une extension de corps différentiels et $A \subset L$ un sous-ensemble, on note $K\langle A \rangle$ le sous-corps différentiel de (L, δ_L) engendré par A et K .

Corollaire 1.3.12 ([MMP06, Partie 2, Lemme 5.1]). *Soient $(\mathcal{U}, \delta_\mathcal{U})$ un corps différentiellement clos et $A \subset \mathcal{U}$ un ensemble de paramètres. On a la description suivante de la clôture définissable et de la clôture algébrique de A :*

$$\text{dcl}(A) = \mathbb{Q}\langle A \rangle \text{ et } \text{acl}(A) = \mathbb{Q}\langle A \rangle^{\text{alg}}.$$

³Autrement dit, pour tout sous-ensemble de paramètres petit $B \subset \mathcal{U}$, les sous-ensembles B -définissables de \mathcal{C} sont les sous-ensembles $\text{dcl}(B) \cap \mathcal{C}$ -définissables de \mathcal{C} dans le langage des anneaux.

Définition 1.3.13. Soient $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est une extension de corps différentiels et $a \in L^n$. On appelle *ordre de a sur K* et on note $\text{ord}(a/K)$, l'entier défini par

$$\text{ord}(a) = \text{tr}(K\langle a \rangle / K) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

où pour toute extension de corps $K \subset K'$, $\text{tr}(K'/K)$ désigne le degré de transcendance de l'extension.

Corollaire 1.3.14 ([MMP06, Partie 2, Lemmes 5.7 et 5.8]). *Soient (\mathcal{U}, δ_U) un corps différentiellement clos, $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_U)$ un sous-corps différentiel et $a \in \mathcal{U}^n$. Alors*

$$\text{RM}(a/K) \leq \text{ord}(a/K).$$

De plus, l'ordre contrôle la déviation lorsqu'il est fini : si $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est une extension de corps différentiels et $a \in \mathcal{U}^n$ tel que $\text{ord}(a/K) < \infty$, alors $a \perp_K L$ si et seulement si $\text{ord}(a/K) = \text{ord}(a/L)$.

Notation 1.3.15. Soit (K, δ) un corps différentiel. On note $K\{X_1, \dots, X_n\}$ la (K, δ) -algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées X_1, \dots, X_n .

Corollaire 1.3.16 (Description des types). *Soient (\mathcal{U}, δ_U) un corps différentiellement clos et $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_U)$ un sous-corps différentiel. L'application définie par*

$$I : \begin{cases} S_n(K) \longrightarrow & \text{Spec}_\delta(K\{X_1, \dots, X_n\}) \\ p \mapsto & \{P \in K\{X_1, \dots, X_n\} \mid "P(x) = 0" \in p\} \end{cases}$$

est une bijection, où $\text{Spec}_\delta(K\{X_1, \dots, X_n\})$ est l'ensemble des idéaux premiers différentiels de la (K, δ) -algèbre $K\{X_1, \dots, X_n\}$.

L'anneau $K\{X_1, \dots, X_n\}$ n'est jamais noetherien si $n \geq 1$. Néanmoins, il admet un caractère noetherien lorsque l'on se restreint aux idéaux radicaux différentiels.

Théorème 1.3.17 ([MMP06, Partie 2, Théorème 1.16]). *Soient (K, δ) un corps différentiel de caractéristique 0 et $n \in \mathbb{N}$. Alors toute suite croissante d'idéaux différentiels radicaux de $K\{X_1, \dots, X_n\}$ est stationnaire.*

En particulier, tout idéal différentiel radical $K\{X_1, \dots, X_n\}$ est engendré en tant qu'idéal différentiel radical par un nombre fini d'éléments de $K\{X_1, \dots, X_n\}$.

Ce théorème est appelé le théorème de Ritt-Raudenbush. On a la conséquence immédiate suivante.

Corollaire 1.3.18. *La théorie DCF_0 est ω -stable.*

Démonstration. D'après le théorème de Ritt-Raudenbush, on peut choisir pour tout idéal premier différentiel $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$, un système générateur $S(I)$ de l'idéal I en tant qu'idéal différentiel radical. La description précédente de l'ensemble $S_n(A)$ des types à paramètres dans A montre que l'application

$$\begin{cases} S_n(A) \longrightarrow & \mathbb{Q}\langle A \rangle\{X_1, \dots, X_n\}^{(\mathbb{N})} \\ p \mapsto & S(I(p)) \end{cases}$$

est une injection. On en déduit que $S_n(A)$ est dénombrable dès que A est dénombrable et donc que la théorie DCF_0 est ω -stable. \square

Remarque 1.3.19. Pour vérifier qu'une théorie est ω -stable, il suffit de contrôler le cardinal de l'ensemble $S_1(A)$ des types à paramètres dans A à une indéterminée [TZ12, Lemme 5.2.2]. Dans l'argument précédent, on peut donc utiliser seulement la version faible du théorème de Ritt suivante :

Toute suite croissante d'idéaux différentiels radicaux de la (K, δ) -algèbre différentielle $K\{X\}$ est stationnaire.

1.3.3. Propriété de la base canonique et dichotomie. Les corps différentiellement clos étant ω -stables, les définitions et les résultats des sections précédentes se spécialisent au cas des corps différentiellement clos. Une des propriétés remarquables des corps différentiellement clos qui n'est pas conséquence de la stabilité est la propriété de la base canonique.

On commence par rappeler la définition de base canonique pour un type dans une théorie ω -stable.

Définition 1.3.20. Soit T une théorie ω -stable, \mathfrak{M} un modèle κ -saturé de T et $p \in S(A)$ un type stationnaire sur un ensemble petit de paramètres A . On dit qu'un uplet $\bar{c} \in M^n$ est une *base canonique* de p si pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{M})$, $\sigma(\bar{c}) = \bar{c}$ si et seulement si $\sigma(p) = p$.

Par définition, deux bases canoniques $\bar{c} \in M^n$ et $\bar{c}' \in M^n$ pour le même type stationnaire $p \in S(A)$ sont interdéfinissables (i.e. $\text{dcl}(c) = \text{dcl}(c')$). Dans une théorie ω -stable qui élimine les imaginaires, tout type stationnaire admet une base canonique [TZ12, Théorème 8.4.3].

On notera $\text{Cb}(p) \in M^n$ la base canonique du type stationnaire $p \in S(A)$ qui est bien définie modulo interdéfinissabilité d'après ce qui précède.

Proposition 1.3.21 ([TZ12, Lemme 8.5.8]). *Soit T une théorie ω -stable, \mathfrak{M} un modèle de T et $p \in S(A)$ un type stationnaire. Alors :*

- (i) *Pour tout $B \subset A$, le type p est une extension non-déviante de sa restriction à B si et seulement si $\text{Cb}(p) \in \text{acl}(B)$.*
- (ii) *Pour tout $B \subset A$, le type p est une extension non-déviante de sa restriction à B et sa restriction à B est un type stationnaire si et seulement si $\text{Cb}(p) \in \text{dcl}(B)$.*

Définition 1.3.22. Soit T une théorie ω -stable, \mathfrak{M} un modèle κ -saturé et $p, q \in S(A)$ des types. On dit que p est *interne* à q si pour toute réalisation a de p , il existe des réalisations b_1, \dots, b_n de q et une extension de paramètres $A \subset B$ vérifiant $a \perp_A B$ telles que :

$$a \in \text{dcl}(B, b_1, \dots, b_n).$$

Théorème 1.3.23 ([PZ03]). *Soit (K, δ) un corps différentiel et $p \in S(K)$ un type stationnaire d'ordre fini. Considérons $c = \text{Cb}(p)$ la base canonique du type p et a une réalisation de p dans une extension différentielle de (K, δ) . Le type $\text{tp}(c/K\langle a \rangle)$ est interne au type générique des constantes.*

Ce théorème implique que la conjecture de trichotomie est valable pour les corps différentiellement clos sous la forme suivante.

Corollaire 1.3.24 ([HS96], [PZ03, Corollaire 3.10]). *Soient (K, δ) un corps différentiel et $p \in S(K)$ un type minimal. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le type p est orthogonal aux constantes.*
- (ii) *Le type p est localement modulaire*

Remarque 1.3.25. En particulier, la conjecture de trichotomie expliquée dans la remarque 1.1.19 est valable dans les corps différentiellement clos sous la forme forte suivante :

Tout ensemble fortement minimal non localement modulaire interprète un corps infini. Ce corps est toujours définissablement isomorphe au pur corps algébriquement clos des constantes et l'interprétation est définissable à l'intérieur de tout corps différentiellement clos.

2. D -VARIÉTÉS ET ENSEMBLES DÉFINISSABLES ASSOCIÉS

Dans cette partie, nous étudions les interactions entre les ensembles définissables dans un corps différentiellement clos et la notion de D -variété, introduite par A. Buium dans [Bui93]. L'utilisation des D -variétés pour l'étude des corps différentiellement clos est fréquente en théorie des modèles ([HI03], [PZ03]). La relation entre la catégorie des D -schémas et les ensembles définissables (et les types) dans un corps différentiellement clos est analogue à la relation entre les schémas et les ensembles définissables dans un corps algébriquement clos.

Dans la première section, nous rappelons la définition et les propriétés structurelles des D -schémas ainsi que de la notion associée de sous-schéma invariant. Dans la deuxième section, nous nous concentrons sur la relation entre D -variété et ensemble définissable dans la théorie \mathbf{DCF}_0 . Enfin, dans la dernière section, nous prouvons, à l'aide du principe de réflexivité de Shelah dans une théorie stable, un premier critère d'orthogonalité aux constantes (Théorème 2.3.4) qui sera développé et enrichi pour les D -variétés définie sur le corps des nombres réels dans la troisième partie de ce texte.

2.1. D -schémas.

2.1.1. Catégorie des D -schémas.

Définition 2.1.1. On appelle D -schéma tout couple (X, δ_X) où X est un schéma et $\delta_X : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est une dérivation sur le faisceau structural \mathcal{O}_X de X , c'est-à-dire un morphisme de faisceaux en groupes abéliens satisfaisant à la règle de Leibniz :

$$\delta_X(s.t) = \delta_X(s).t + s.\delta_X(t) \text{ pour tout ouvert } U \subset X \text{ et tous } s, t \in \mathcal{O}_X(U).$$

Si (X, δ_X) et (Y, δ_Y) sont deux D -schémas, on appelle *morphisme de D -schémas* de (X, δ_X) vers (Y, δ_Y) , tout morphisme de schémas $f = (|f|, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathcal{O}_X \\ f^\# \uparrow & & \uparrow f^\# \\ f^{-1}\mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^{-1}\delta_Y} & f^{-1}\mathcal{O}_Y \end{array}$$

On a ainsi défini une catégorie appelée *catégorie des D -schémas* et notée **D-Sch**.

Exemple 2.1.2. Soit (A, δ_A) un anneau (commutatif) différentiel. La dérivation δ_A se prolonge uniquement aux localisations de A et induit une dérivation sur le faisceau structural $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$. On obtient ainsi un D -schéma noté $(\text{Spec}(A), \delta_A)$.

Remarque 2.1.3. Plus généralement, on peut définir la catégorie **C** des D -espaces localement annelés dont :

- les objets sont les espaces localement annelés (X, \mathcal{O}_X) muni d'une dérivation $\delta_X : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ du faisceau structural \mathcal{O}_X .
- les flèches sont les morphismes d'espaces localement annelés faisant commuter le diagramme (2).

La catégorie des D -schémas s'identifie alors à la sous-catégorie pleine de la catégorie **C** dont les objets sont les D -espaces localement annelés $(X, \mathcal{O}_X, \delta_X)$ localement représentable sous la forme $(\text{Spec}(A), \delta_A)$ où (A, δ) est un anneau différentiel.

La catégorie **D-Sch** admet un foncteur d'oubli naturel vers la catégorie des schémas obtenu en oubliant la dérivation sur le faisceau structural $F_{\text{oub}} : \mathbf{D-Sch} \longrightarrow \mathbf{Sch}$.

Notation 2.1.4. Pour toute propriété (P) des schémas (resp. des morphismes de schémas), nous dirons qu'un D -schéma (resp. un morphisme de D -schémas) possède la propriété (P) si le schéma sous-jacent (resp. le morphisme de schémas sous-jacent) possède la propriété (P) .

Par exemple, on dira qu'un D -schéma (X, δ_X) est de type fini (resp. séparé, réduit, irréductible) si le schéma sous-jacent X a la même propriété.

Proposition 2.1.5. La catégorie **D-Sch** admet des produits fibrés et un élément terminal. De plus, la formation des produits fibrés commute au foncteur d'oubli vers la catégorie des schémas.

Démonstration. En effet, si (C, δ_C) est un anneau différentiel et (A, δ_A) et (B, δ_B) sont deux (C, δ_C) -algèbres différentielles, on définit la (C, δ) -algèbre différentielle

$$(A, \delta_A) \otimes_{(C, \delta_C)} (B, \delta_B) = (A \otimes_C B, \delta_A \otimes_C \text{Id}_B + \text{Id}_A \otimes_C \delta_B).$$

On vérifie alors qu'on a ainsi défini le produit de $(\text{Spec}(A), \delta_A)$ avec $(\text{Spec}(B), \delta_B)$ au dessus de $(\text{Spec}(C), \delta_C)$. Pour les D -schémas généraux, on procède par recollement à partir d'un recouvrement affine. Cette construction montre que la formation des produits commute au foncteur d'oubli vers la catégorie des schémas. \square

Remarque 2.1.6. Soit (K, δ) un corps différentiel. Le couple $(\text{Spec}(K), \delta)$ est un D -schéma. On note $\mathbf{D-Sch}/(K, \delta)$, la catégorie des objets au dessus de $(\text{Spec}(K), \delta)$.

La catégorie $\mathbf{D-Sch}/(K, \delta)$ admet un élément terminal ainsi que des produits fibrés d'après la proposition 2.1.5. Cette proposition montre aussi que, si $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est une extension de corps différentiels alors, on a un foncteur de changement de base noté

$$-\times_{(K, \delta)}(L, \delta_L) : \begin{cases} \mathbf{D-Sch}/(K, \delta) & \longrightarrow \mathbf{D-Sch}/(L, \delta_L) \\ (X, \delta_X) & \longmapsto (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \end{cases}.$$

Si (X, δ_X) est un D -schéma alors tout ouvert $U \subset X$ est naturellement muni d'une structure de D -schéma notée (U, δ_U) qui fait de l'immersion ouverte un morphisme de D -schémas.

Lemme 2.1.7. Soient (X, δ_X) et (Y, δ_Y) deux D -schémas, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas et $U \subset X$ un ouvert schématiquement dense. Si $f|_U : (U, \delta_U) \longrightarrow (Y, \delta_Y)$ est un morphisme de D -schémas alors $f : (X, \delta_X) \longrightarrow (Y, \delta_Y)$ est un morphisme de D -schémas.

La réciproque du lemme 2.1.7 est bien-sûr toujours vérifiée même lorsqu'on ne suppose plus que $U \subset X$ est schématiquement dense

Démonstration. On veut montrer que le diagramme (2) est commutatif. Comme l'inclusion $i : (U, \delta_U) \longrightarrow (X, \delta_X)$ est un morphisme de D -schémas, et par adjonction entre les foncteurs i^{-1} et i_* , on a le diagramme commutatif :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} i_* \mathcal{O}_U & \xrightarrow{i_* \delta_U} & i_* \mathcal{O}_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

De plus, puisque $U \subset X$ est schématiquement dense, les deux flèches verticales sont injectives. Ainsi, pour vérifier la commutativité du diagramme (2), il suffit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i_* \mathcal{O}_U & \xrightarrow{i_* \delta_U} & i_* \mathcal{O}_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ f^{-1} \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^{-1} \delta_Y} & f^{-1} \mathcal{O}_Y \end{array}$$

La commutativité du dernier diagramme est conséquence du fait que $f|_U : (U, \delta_U) \longrightarrow (Y, \delta_Y)$ est un morphisme de D -schémas et de l'adjonction entre les foncteurs i^{-1} et i_* . \square

Définition 2.1.8. Soient (X, δ_X) et (Y, δ_Y) deux D -schémas intègres et $f : X \dashrightarrow Y$ un morphisme rationnel. On dit que $f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ est un *morphisme rationnel de D -schémas* si sa restriction à un ouvert non vide de X est un morphisme de D -schémas.

D'après le lemme 2.1.7, si $f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ est un morphisme rationnel de D -schémas alors f définit un morphisme de D -schémas sur son ouvert de définition.

2.1.2. Sous-schémas invariants.

Définition 2.1.9. Soit (X, δ_X) un D -schéma. On dit qu'un sous-schéma fermé $Y \subset X$ est un *sous-schéma fermé invariant* de (X, δ_X) , si le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ définissant Y est stable par la dérivation δ_X , c'est-à-dire si pour tout ouvert $U \subset X$,

$$\mathcal{I}_Y(U) \subset (\mathcal{O}_X(U), \delta_X) \text{ est un idéal différentiel.}$$

Remarque 2.1.10. Soit (X, δ_X) un D -schéma et $i : Y \rightarrow X$ un sous-schéma fermé invariant. La dérivation δ_X passe au quotient en une dérivation $\delta_Y : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$ sur le faisceau structural de Y qui fait de (Y, δ_Y) un D -schéma tel que l'immersion fermée $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$ est un morphisme de D -schémas.

Réciproquement, toute immersion fermée $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$ de D -schémas définit un sous-schéma fermé invariant de (X, δ_X) .

Lemme 2.1.11. Soient $f : (X, \delta_X) \rightarrow (S, \delta_S)$ un morphisme de D -schémas et $(T, \delta_T) \rightarrow (S, \delta_S)$ un changement de base.

Si $Y \subset X$ un sous-schéma fermé invariant de (X, δ_X) alors $Y \times_S T$ est un sous-schéma fermé invariant de $(X, \delta_X) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T)$.

Démonstration. L'immersion fermée $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$ induit après changement de base, un morphisme de D -schémas :

$$i_B : (Y, \delta_Y) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T) \rightarrow (X, \delta_X) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T)$$

La notion d'immersion fermée étant invariante par changement de base, on conclut à l'aide de la remarque 2.1.10. \square

En particulier, si (X, δ_X) est un D -schéma, $U \subset X$ un ouvert et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé invariant alors $Y \cap U$ est un sous-schéma fermé invariant de (U, δ_U) . Réciproquement, on a le résultat suivant.

Lemme 2.1.12. Soient (X, δ_X) un D -schéma et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. Considérons $U \subset X$ un ouvert tel que $Y \cap U$ est schématiquement dense dans Y .

Si $Y \cap U$ est un sous-schéma fermé invariant de (U, δ_U) alors Y est un sous-schéma fermé invariant de (X, δ_X) .

Démonstration. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, le faisceau d'idéaux définissant Y . L'immersion ouverte $U \subset X$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X/\mathcal{I} & \xrightarrow{j} & i_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_U \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi_U \\ \mathcal{O}_X & \longrightarrow & i_*\mathcal{O}_X|_U \end{array}$$

où la première flèche horizontale j est injective car $Y \cap U$ est schématiquement dense dans Y .

Montrons que le faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est stable par la dérivation δ_X .

Soit $V \subset X$ un ouvert et $f \in \mathcal{I}(V)$. On a alors $\pi_U(\delta_X(f)|_U) = \pi_U[\delta_U(f|_U)] = 0$ car $Y \cap U$ est un sous-schéma fermé invariant de U . On en déduit que $(j \circ \pi)(\delta_X(f)) = 0$ donc que $\pi(\delta_X(f)) = 0$ car j est injective, c'est-à-dire $\delta_X(f) \in \mathcal{I}(V)$. \square

Proposition 2.1.13. Soit (X, δ_X) un D -schéma noethérien au dessus de $(\mathbb{Q}, 0)$ et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé invariant. Alors :

- (i) Le sous-schéma fermé invariant réduit $Y_{red} \subset Y \subset (X, \delta_X)$ est un sous-schéma fermé invariant.

- (ii) *Les composantes irréductibles $Y_1, \dots, Y_n \subset (X, \delta_X)$ de Y_{red} sont des sous-schémas fermés invariants.*

Démonstration. Si (A, δ) est un anneau différentiel de caractéristique 0 alors le radical de tout idéal différentiel est un idéal différentiel [MMP06, Chapitre 2, Lemme 1.15]. On en déduit que la propriété (i) est vérifiée.

Pour (ii), considérons Y_i une composante irréductible de Y_{red} . Considérons un ouvert $U \subset X$ tel que

$$Y_{red} \cap U = Y_i \cap U \neq \emptyset$$

(Il suffit de considérer l'ouvert $U = X \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$).

Le schéma $Y_i \cap U = Y_{red} \cap U$ est un sous-schéma fermé invariant de (U, δ_U) . Comme de plus $Y_i \cap U \subset Y_i$ est schématiquement dense dans Y_i (car Y_i est irréductible et $U \cap Y_i$ est non vide), le sous-schéma fermé $Y_i \subset (X, \delta_X)$ est invariant d'après le lemme 2.1.12. \square

2.2. Ensemble définissable associé à une D -variété. On fixe (U, δ_U) un modèle saturé de la théorie des corps différentiellement clos. Tous les corps différentiels considérés seront des sous-corps différentiels de (U, δ_U) .

Notation 2.2.1. Soit (K, δ) un corps différentiel. On appelle D -variété au dessus de (K, δ) , tout D -schéma au dessus de (K, δ) séparé, de type fini et réduit.

En particulier, les D -variétés au dessus de (K, δ) ne sont pas supposées irréductibles et on parlera de D -variétés irréductibles (resp. absolument irréductibles) au dessus de (K, δ) pour désigner les D -variétés au dessus de (K, δ) dont le K -schéma sous-jacent est irréductible (resp. absolument irréductible).

Remarque 2.2.2. La notion de D -variété est préservée par changement de base par un corps différentiel puisque les corps différentiels sont de caractéristique 0, c'est-à-dire si $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est une extension de corps différentiels et (X, δ_X) est une D -variété au dessus de (K, δ) , alors $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ est une D -variété au dessus de (L, δ_L) .

2.2.1. Interprétation d'une D -variété dans \mathbf{DCF}_0 . Soit (K, δ) un corps différentiel.

Notation 2.2.3. Soient $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ une extension de corps différentiels et (X, δ_X) un D -schéma au dessus de (K, δ) . On appelle *ensemble des (L, δ_L) -points différentiels de (X, δ_X)* , l'ensemble

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \text{Hom}_{D\text{-Sch}/(K, \delta)}[(\text{Spec } L, \delta_L); (X, \delta_X)].$$

On montre dans la suite de cette partie que l'ensemble $(X, \delta_X)^{(U, \delta_U)}$ peut être muni d'une structure d'ensemble définissable dans \mathbf{DCF}_0 .

Exemple 2.2.4. Soit (S) un système d'équations différentielles algébriques à paramètres dans (K, δ) , c'est-à-dire un système d'équations différentielles algébriques de la forme :

$$(S) : \begin{cases} P_1(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0 \\ \vdots \\ P_r(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0 \end{cases}$$

où les $P_i \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_r^{(0)}, \dots, X_1^{(k)}, \dots, X_r^{(k)}]$ sont des polynômes.

Le foncteur \mathcal{S} "solutions de (S) " de la catégorie des (K, δ) -algèbres différentielles vers la catégorie des ensembles est représentable par un D -schéma affine (X, δ_X) au dessus de (K, δ) .

En effet, considérons $K\{X_1, \dots, X_r\}$ la (K, δ) -algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées X_1, \dots, X_r . Pour tout $i \leq r$, on a

$$P_i(X_1, \dots, X_r, \delta(X_1), \dots, \delta^k(X_1), \dots, \delta^k(X_r)) \in K\{X_1, \dots, X_r\}.$$

Notons $I \subset K\{X_1, \dots, X_r\}$ l'idéal différentiel engendré par ces éléments. Le foncteur \mathcal{S} est alors représentable par le D -schéma affine associé à la (K, δ) -algèbre différentielle $K\{X_1, \dots, X_n\}/I$. En général, ce D -schéma n'est ni réduit ni de type fini.

Remarque 2.2.5. On en déduit que si (X, δ_X) représente le foncteur solutions d'un système d'équations différentielles algébriques (S) à paramètres dans (K, δ) alors $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = \mathcal{S}(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ s'identifie à un ensemble K -définissable de $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$.

Construction 2.2.6. Soit (X, δ_X) une D -variété au dessus de (K, δ) . Considérons $\mathcal{V} = (V_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$ où (V_i) est un recouvrement ouvert affine de X et où les $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ sont des immersions fermées.

On peut construire une formule $\phi_{\mathcal{V}}(x)$ sans quantificateurs à paramètres dans K telle que pour toute extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$, on a l'identification suivante :

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L).$$

Démonstration. Pour toute extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$, puisque $(V_i)_{i=1}^n$ est un recouvrement ouvert de X , on a une application surjective :

$$\pi : \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} \longrightarrow (X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}.$$

qui identifie $(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}$ au quotient de $\bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)}$ par une relation d'équivalence E .

Pour tout $i \leq n$, les immersions fermées $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ permettent d'identifier $(V_i, \delta_i)^{(L, \delta_L)}$ à l'ensemble des solutions d'un système d'équations différentielles algébriques (S_i) à n indéterminées et donc à un ensemble K -définissable sans quantificateurs dans (L, δ_L) .

On en déduit que $\bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)}$ s'identifie à un ensemble K -définissable de (L, δ_L) sans quantificateurs.

Assertion. La relation d'équivalence E est K -définissable sans quantificateurs dans le langage des anneaux.

En effet, sa définition est donnée par les fonctions de transitions du recouvrement ouvert $(U_i)_{i \leq n}$ et donc définissable sans quantificateurs dans le langage des anneaux (et donc dans le langage des anneaux différentiels).

Par élimination des imaginaires dans la théorie des corps algébriquement clos, il existe une formule sans quantificateurs $\phi_{\mathcal{V}}(\overline{x})$ telle que pour toute extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$:

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} / E = \phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L).$$

□

Le lemme suivant montre que la structure définissable induite ne dépend pas du recouvrement ouvert choisi.

Lemme 2.2.7. Soit \mathcal{E} l'ensemble des données $\mathcal{V} = (V_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$ où (V_i) est un recouvrement ouvert affine de V et où les $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ sont des immersions fermées.

Si $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathcal{E}$ alors pour toute extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$, les ensembles $\phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L)$ et $\phi_{\mathcal{V}'}(L, \delta_L)$ sont en bijection définissable sans quantificateurs à paramètres dans (K, δ) .

Démonstration. Deux recouvrements ouverts admettent toujours un raffinement commun. On peut donc supposer que \mathcal{V}' est un recouvrement plus fin que \mathcal{V} . Il suffit alors de vérifier que si X est un D -schéma affine et $(V_i)_{i \leq n}$ un recouvrement affine de X alors l'application

$$\pi : \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} \longrightarrow (X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}$$

est K -définissable sans quantificateurs, ce qui est immédiat.

□

Suivant l'usage en théorie des modèles, si $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ est une extension différentiellement close, on identifie $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ à un ensemble K -définissable dans $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ sans préciser le recouvrement affine choisi. On a la description intrinsèque suivante de la structure induite par $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ sur $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$.

Corollaire 2.2.8. *Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété au-dessus de (K, δ) . Les sous-ensembles K -définissables de $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ sont les combinaisons booléennes d'ensembles de la forme $(Y, \delta_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ où $Y \subset (X, \delta_X)$ est une sous-variété invariante.*

Démonstration. Supposons que le D -schéma (X, δ_X) est affine et considérons une immersion fermée $X \subset \mathbb{A}^n$. D'après le théorème 1.3.7, les sous-ensembles K -définissables de \mathcal{U}^n sont les combinaisons booléennes de sous-ensembles de la forme :

$$V(I) = \{x \in \mathcal{U}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in I\} \subset \mathcal{U}^n.$$

où $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$ est un idéal différentiel de la (K, δ) -algèbre libre d'indéterminées X_1, \dots, X_n . On en déduit que les sous-ensembles définissables de $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ sont les combinaisons booléennes des ensembles $V(I)$ où $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$ est un idéal différentiel contenant l'idéal I_X définissant X . Ces derniers sont en correspondance avec les sous-schémas fermés invariants de (X, δ_X) . La proposition 2.1.13 permet alors de conclure.

On en déduit le cas général à l'aide du lemme 2.1.12 et de la construction précédente. \square

Notation 2.2.9. Soient (X, δ_X) une D -variété au-dessus d'un corps différentiel (K, δ) et $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$. On note $S_{\Sigma}(K)$ l'ensemble des types vivants sur Σ (c'est-à-dire vérifiant $p_{\Sigma}(x) \models x \in \Sigma$) à paramètres dans K .

Corollaire 2.2.10. *Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété au-dessus de (K, δ) . On pose $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$. Pour toute sous-variété fermée invariante $Y \subset (X, \delta_X)$, il existe un unique type complet $p_{(Y, \delta_Y)}(x)$ vivant sur Σ vérifiant :*

$$p_{(Y, \delta_Y)}(x) \models \begin{cases} x \in (Y, \delta_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} \\ x \notin (Y', \delta_{Y'})^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} \text{ pour } Y' \not\subseteq Y \text{ une sous-variété invariante stricte} \end{cases}$$

De plus, en notant $\text{Inv}_{\delta}(X, \delta_X)$ l'ensemble des sous-variétés fermées irréductibles et invariantes de (X, δ_X) , l'application $\text{Inv}_{\delta}(X, \delta_X) \rightarrow S_{\Sigma}(K)$ ainsi définie est une bijection.

Le cas affine est donné par le corollaire 1.3.16 et la cas général s'en déduit aisément à l'aide du lemme 2.1.12.

2.2.2. Type générique d'une D -variété irréductible. Soit (X, δ_X) une D -variété irréductible au-dessus de (K, δ) . Le corollaire précédent montre qu'il existe un type $p \in S(K)$ à paramètres dans K et vivant sur $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ dont les réalisations coïncident avec les réalisations du point générique (au sens de la géométrie algébrique) de (X, δ_X) .

Définition 2.2.11. Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété irréductible au-dessus de (K, δ) . On appelle *type générique de (X, δ_X)* , le type $p_{(X, \delta_X)} \in S(K)$ correspondant à la variété X elle-même dans le corollaire 2.2.10.

Lemme 2.2.12. *Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété irréductible au-dessus de (K, δ) . Posons $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$.*

(i) *Le type $p_{(X, \delta_X)}$ est l'unique type d'ordre maximal vivant sur Σ . De plus, il vérifie*

$$\text{ord}(p_{(X, \delta_X)}) = \dim(X).$$

(ii) *Le type $p_{(X, \delta_X)}$ est stationnaire si et seulement si la D -variété (X, δ_X) est absolument irréductible. Dans ce cas, son unique extension non-déviant à une extension $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ est le type générique de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$.*

Démonstration. Soit $a \models p_{(X, \delta_X)}$ une réalisation du type $p_{(X, \delta_X)}$. Par définition du type $p_{(X, \delta_X)}$, ses réalisations sont les réalisations du point générique de (X, δ_X) et donc le sous-corps différentiel $K\langle a \rangle$ engendré par a dans (\mathcal{U}, δ_U) est isomorphe au corps différentiel $(K(X), \delta_X)$. On en déduit que :

$$\text{ord}(p) = \text{tr}(K\langle a \rangle / K) = \text{tr}(K(X) / K) = \dim(X).$$

La propriété (i) est donc vérifiée. Montrons la propriété (ii). Soit $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ une extension de corps différentiels.

Le corollaire 2.2.10 montre que les extensions de $p_{(X, \delta_X)}$ à (L, δ_L) correspondent aux sous-variétés irréductibles invariantes de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ dont la projection vers X est dominante.

D'après le corollaire 1.3.14 et la propriété (i) au-dessus, les extensions non déviantes de $p_{(X, \delta_X)}$ à (L, δ_L) correspondent aux sous-variétés irréductibles invariantes de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ de dimension $\dim(X)$ et dont la projection vers X est dominante.

On en déduit que les extensions non-déviantes de $p_{(X, \delta_X)}$ à (L, δ_L) correspondent aux composantes irréductibles de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$. \square

Remarque 2.2.13. La propriété (i) du lemme précédent montre qu'il est facile de calculer l'ordre du type générique $p_{(X, \delta_X)}$ si l'on connaît la D -variété (X, δ_X) . En particulier l'ordre de $p_{(X, \delta_X)}$ ne dépend que de la variété X et non de la structure de D -variété sur X considérée.

Cependant, on ne sait en général pas déterminer $\text{RM}(p_{(X, \delta_X)})$ et $\text{RU}(p_{(X, \delta_X)})$. De plus, ces deux quantités dépendent de la structure de D -variété sur X .

Lemme 2.2.14. Soient (K, δ) un corps différentiel, (X, δ_X) et (Y, δ_Y) des D -variétés irréductibles au-dessus de (K, δ) . Considérons $a \models p_{(X, \delta_X)}$, $b \models p_{(Y, \delta_Y)}$ des réalisations des types génériques de (X, δ_X) et (Y, δ_Y) respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $b \in \text{dcl}(K, a)$
- (ii) Il existe un morphisme rationnel de D -variétés

$$\phi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y) \text{ tel que } \phi^{\mathcal{U}}(a) = b.$$

où $\phi^{\mathcal{U}}$ désigne le morphisme induit par ϕ après passage au points différentiels dans (\mathcal{U}, δ_U) .

Démonstration. (ii) \implies (i) est immédiat puisque l'application $\phi^{\mathcal{U}}$ est K -définissable et $\phi^{\mathcal{U}}(a) = b$. Montrons que (i) \implies (ii). Comme $b \in \text{dcl}(K, a)$, on en déduit que :

$$K\langle b \rangle = \text{dcl}(K, b) \subset K\langle a \rangle = \text{dcl}(K, a) \subset (\mathcal{U}, \delta_U).$$

Les isomorphismes de corps différentiels au-dessus de (K, δ) , $(K(X), \delta_X) \simeq K\langle a \rangle$ et $(K(Y), \delta_Y) \simeq K\langle b \rangle$ définissent alors une injection de corps différentiels $i : (K(Y), \delta_Y) \longrightarrow (K(X), \delta_X)$ et donc un morphisme rationnel de D -variétés $\phi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ tel que $\phi^{\mathcal{U}}(a) = b$. \square

2.3. Un premier critère d'orthogonalité aux constantes. On donne une caractérisation des D -variétés absolument irréductibles dont le type générique est orthogonal aux constantes.

Définition 2.3.1. Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété irréductible sur (K, δ) . On appelle *intégrale première rationnelle* de (X, δ_X) , toute fonction rationnelle $f \in K(X)$ telle que $\delta_X(f) = 0$.

Remarque 2.3.2. Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété irréductible sur (K, δ) . L'ensemble des intégrales premières rationnelles de X s'identifie au corps des constantes du corps différentiel $(K(X), \delta_X)$.

Nous dirons que (X, δ_X) est *sans intégrale première non constante* si $K(X)^\delta = K^\delta$.

Lemme 2.3.3. Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété irréductible au-dessus de (K, δ) . On a équivalence entre :

- (i) La D -variété irréductible (X, δ_X) est sans intégrale première rationnelle.

- (ii) Pour toute variété Y de dimension > 0 au dessus du corps des constantes $k = K^\delta$ de (K, δ) , il n'existe pas de morphisme rationnel dominant de D -schémas au dessus de (K, δ)

$$f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta).$$

Démonstration. On raisonne par contraposition. Soit $f \in (K(X), \delta_X)$ une intégrale première rationnelle non constante. La fonction f détermine un morphisme rationnel dominant de D -schémas au dessus de (K, δ)

$$f : (X, \delta_X) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta)$$

On en déduit que $(ii) \implies (i)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un morphisme $(X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta)$ rationnel dominant. Considérons $f \in k(Y)$ une fonction rationnelle non constante. Le morphisme rationnel dominant obtenu par composition

$$(X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta)$$

est un morphisme de D -schémas. On en déduit qu'il correspond à une intégrale première rationnelle non constante de (X, δ_X) . \square

Théorème 2.3.4. Soient (K, δ) un corps différentiel et (X, δ_X) une D -variété absolument irréductible au dessus de (K, δ) . On a équivalence entre :

- (i) Le type générique de (X, δ_X) est orthogonal aux constantes.
- (ii) Pour toute extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$, le changement de base $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ est sans intégrale rationnelle non constante.
- (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la D -variété produit $(X, \delta_X)^n$ est sans intégrale première rationnelle non constante.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$: Supposons qu'il existe une extension de corps différentiels $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ telle que le changement de base $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ admette une intégrale première non constante $f \in (K(X), \delta_X)$. On obtient un morphisme rationnel dominant de D -schémas au dessus de (L, δ_L) :

$$f : (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta_L)$$

Les types génériques de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ et de $(\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta_L)$ ne sont pas faiblement orthogonaux d'après le lemme 2.2.14.

De plus, d'après la propriété (ii) du lemme 2.2.12, le type générique de $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ est l'unique extension non-déviant à L du type générique de (X, δ_X) et le type générique de $(\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta_L)$ est l'unique extension non déviant à L du type générique des constantes. On en déduit que $p_{(X, \delta_X)}$ est non-orthogonal au type générique des constantes.

$(ii) \implies (iii)$ Considérons f une intégrale première rationnelle de $(X, \delta_X)^n$ avec $n \geq 1$ minimal :

$$f : (X, \delta_X)^n \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta)$$

On note (L, δ_L) le corps des fractions de la D -variété irréductible $(X, \delta_X)^{n-1}$. Par minimalité de $n \in \mathbb{N}$, la D -variété $(X, \delta_X)^{n-1}$ n'admet pas d'intégrales premières rationnelles non constantes et donc $L^{\delta_L} = k$. Par changement de base, f induit une intégrale première

$$\tilde{f} : (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k, 0)} (L, \delta_L)$$

qui est non constante car $f \notin k$ et $L^{\delta_L} = k$.

$(iii) \implies (i)$: On note q le type générique des constantes.

Lemme 2.3.5. Soit (K, δ) un corps différentiel et $p \in S(K)$ un type non-orthogonal aux constantes. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, une réalisation a de $p^{\otimes n}$ et une réalisation b de $q|_K$ telle que $b \in \text{dcl}(a, K)$.

Démonstration. D'après le lemme 1.2.5, il existe des entiers $n, m \in \mathbb{N}$ tels que les types $p^{\otimes m}$ et $q^{\otimes n}$ ne sont pas faiblement orthogonaux. Considérons des réalisations $a \models p^{\otimes m}$ et $b \models q^{\otimes n}$ telles que $a \not\perp_K b$. Il existe donc une formule $\phi(x, y)$ à paramètres dans K telle que

$$b \in \phi(\mathcal{U}, a) \subset \mathcal{C}^n \text{ et } \text{RM}(\phi(\mathcal{U}, a)) < n.$$

Le sous-ensemble $\phi(\mathcal{U}, a) \subset \mathcal{C}^n$ est un sous-ensemble définissable à paramètres dans (\mathcal{U}, δ_U) . D'après le corollaire 1.3.9, le corps des constantes est un pur corps algébriquement clos stablement plongé (et donc en particulier élimine les imaginaires dans le langage des anneaux). Il existe donc un paramètre canonique $c \in \mathcal{C}^1$ pour la formule $\phi(U, a)$, c'est-à-dire que pour tout automorphisme de corps $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}, \delta_U)$, on a

$$\sigma(c) = c \text{ si et seulement si } \sigma(\phi(\mathcal{U}, a)) = \phi(\mathcal{U}, a).$$

En particulier, on a $c \in \text{dcl}(K, a)$. Montrons que $\text{RU}(c/K) > 0$. En effet, le rang de Lascar et le rang de Morley coïncident dans un corps algébriquement clos (exemple 1.1.6). On a alors :

$$n = \text{RU}(b/K) > \text{RM}(\phi(x, a)) \geq \text{RM}(b/K, c) = \text{RU}(b/K, c).$$

On en déduit que $c \not\perp_K b$ et donc que le rang de Lascar de c sur K est ≥ 1 . Il suffit alors de remplacer c par une coordonnée non algébrique de c . \square

Supposons que $p = p_{(X, \delta_X)}$ est non-orthogonal aux constantes. D'après le lemme précédent, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, une réalisation a de $p^{\otimes n}$ et une réalisation b de $q|_K$ telle que $b \in \text{dcl}(a, K)$.

Comme $p^{\otimes n}$ est le type générique de $(X, \delta_X)^n$, il suffit d'appliquer le lemme 2.2.14 pour obtenir une intégrale première non constante de $(X, \delta_X)^n$, ce qui montre par contraposition que (iii) \implies (i). \square

Remarque 2.3.6. Modulo la proposition 2.2.14, l'équivalence entre (i) et (iii) se réduit à l'énoncé suivant (valable dans toute théorie stable) : Soient T une théorie stable éliminant les imaginaires et \mathfrak{M} un modèle de T κ -saturé.

Considérons A un ensemble de paramètres petit, D un ensemble fortement minimal A -définissable éliminant les imaginaires et $p \in S(A)$ un type stationnaire. Alors le type p est non-orthogonal au type générique de D si et seulement s'il existe $\bar{a} \in M^n$ réalisant $p^{(n)}$ tel que $\text{dcl}(K) \cap D \subsetneq \text{dcl}(K\bar{a}) \cap D$.

3. UN CRITÈRE D'ORTHOGONALITÉ AUX CONSTANTES POUR LES D -VARIÉTÉS RÉELLES

On s'intéresse désormais aux D -variétés (X, v_X) définies sur le corps \mathbb{R} des nombres réels muni de la dérivation triviale. On dispose d'un foncteur d'analytification réel vers la catégorie des espaces analytiques réels munis de champs de vecteurs. Sous des hypothèses de lissité, on peut alors, par les théorèmes classiques d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles analytiques, intégrer ce champ de vecteur et obtenir un flot réel analytique. Lorsque ce flot est complet (ce qui est automatique sous des hypothèses de compacité), il définit une action continue du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur l'espace topologique métrisable $X(\mathbb{R})^{an}$.

Le critère d'orthogonalité aux constantes que nous présentons (Théorème 3.3.8) consiste en une obstruction topologique à la présence d'intégrale première rationnelle pour ce flot complet et tous ses produits. L'argument essentiel est donné par une notion élémentaire de la théorie des systèmes dynamiques topologiques : les flots faiblement topologiquement mélangeants.

Dans la première section, on étudie le foncteur d'analytification réel (ainsi que son analogue complexe) et son effet sur les sous-variétés fermées invariantes. Dans la deuxième section, on donne une présentation auto-contenue des résultats de dynamique topologique que nous utiliserons, en particulier la notion de flot faiblement topologiquement mélangeant. Enfin, la troisième section est une preuve du critère d'orthogonalité aux constantes annoncé.

3.1. Des D -variétés réelles aux flots réels. On présente les foncteurs d'analytification réel (resp. complexe) pour les D -variétés réelles (resp. complexe). Sous des hypothèses de lissité, on construit alors le flot réel associé (resp. le flot complexe associé). On supposera que le lecteur est familier avec les résultats élémentaires de la théorie des équations différentielles (voir [Arn06] pour le cas réel et la partie 1 du chapitre 1 de [IY08] pour le cas complexe).

Contrairement au cas algébrique, on suivra la terminologie analytique usuelle c'est-à-dire que les variétés analytiques seront toujours supposées lisses et on parlera d'espaces analytiques (réels ou complexes) lorsque l'on travaillera sans hypothèse de lissité.

3.1.1. Flot réel d'une D -variété réelle. On présente d'abord le foncteur d'analytification pour les D -variétés réelles.

Définition 3.1.1. On appellera *D -espace analytique réel*, tout couple (M, v_M) où M est un espace analytique réel et v_M un champ de vecteurs analytique sur M . Si l'espace analytique réel sous-jacent M est lisse, on dit que (M, v_M) est une *D -variété analytique réelle*.

Si (M, v_M) et (N, v_N) sont deux espaces analytiques réels, on définira les morphismes de (M, v_M) vers (N, v_N) comme les applications analytiques $f : M \rightarrow N$ vérifiant $df(v_M) = f^*v_N$.

Construction 3.1.2. Soit (X, v_X) une D -variété au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$. On munit l'ensemble des points réels $M = X(\mathbb{R})$ de X de sa structure analytique (M, \mathcal{O}_M) , i.e. de la topologie métrisable d'espace analytique et du faisceau des fonctions analytiques \mathcal{O}_M .

Remarque 3.1.3. L'espace analytique réel (M, \mathcal{O}_M) est lisse si et seulement si $X(\mathbb{R})$ est contenu dans l'ouvert X_{reg} des points régulier de X .

Le champ de vecteurs v_X induit alors un champ de vecteurs analytique sur M noté v_M . On a ainsi construit un D -espace analytique réel (M, v_M) .

La correspondance $(X, v_X) \mapsto (M, v_M)$ détermine un foncteur appelé *foncteur d'analytification réel* de la catégorie des D -variétés au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$ vers la catégorie des D -espaces analytiques réels.

Construction 3.1.4. Soit (M, v_M) une D -variété réelle analytique. Le théorème d'existence et d'unicité de solutions pour les équations différentielles analytiques (voir [Arn06, §35]) assure l'existence pour tout $x \in M$, d'un unique ouvert connexe $U_x \subset \mathbb{R}$ maximal et d'une application analytique $\phi_x : U_x \rightarrow M$ telle que

$$\begin{cases} \phi_x(0) = x \\ \forall t \in U_x, \frac{d}{dt}\phi_x(t) = v_M(\phi_x(t)). \end{cases}$$

De plus, l'ensemble $U = \bigsqcup_{x \in M} U_x \subset \mathbb{R} \times M$ est un voisinage connexe de $\{0\} \times M$ et la collection des $(\phi_x)_{x \in M}$ définit une application analytique $\phi : U \rightarrow M$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in M, \phi(0, x) = x \\ \forall t \in U_x, \frac{d}{dt}\phi(t, x) = v_M(\phi(t, x)). \end{cases}$$

Définition 3.1.5. Soit (M, v_M) une D -variété analytique réelle. On appelle *flot réel (maximal) de (M, v_M)* , le couple (U, ϕ) maximal associé par la construction 3.1.4.

On dira de plus que le flot (U, ϕ) est *complet* si $U = \mathbb{R} \times M$.

Lemme 3.1.6 ([Arn06, §35]). *Soit (M, v_M) une D -variété analytique réelle compacte. Le flot réel de (M, v_M) est complet.*

Remarque 3.1.7. Soit (M, v_M) une D -variété analytique réelle et (U, ϕ) le flot réel associé. On appelle *courbe intégrale ou orbite au point $x \in X$* , le sous-ensemble

$$\mathcal{O}_x = \{\phi(t, x) \mid (t, x) \in U\}.$$

On observera que la partition de M selon les courbes intégrales du champ de vecteurs v_M définit un feuilletage analytique en courbes sur M dont les singularités sont les zéros du champ de vecteur v_M .

Définition 3.1.8. Soit (M, v_M) une D -variété analytique réelle et $A \subset M$ un sous-ensemble. On note (U, ϕ) le flot associé à (M, v_M) . On dit que $A \subset M$ est *ϕ -invariant* si

$$\phi((\mathbb{R} \times A) \cap U) \subset A.$$

Autrement dit, le sous-ensemble $A \subset M$ est invariant si et seulement si pour tout $a \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(t, a) \in U$, on a $\phi(t, a) \in A$.

On montre maintenant que la propriété d'invariance est de nature locale.

Notation 3.1.9. Soient M une variété analytique réelle et $a \in M$. On note (M, a) le germe de l'espace analytique M en a . Si $A \subset M$ est un sous-ensemble de M , on note $[A]_a$ le germe de A en a , c'est-à-dire la classe d'équivalence de A modulo la relation d'équivalence définie par :

$$A \sim_a B \text{ si et seulement si il existe un voisinage } V \subset M \text{ de } a \text{ tel que } A \cap V = B \cap V.$$

La relation d'inclusion entre les sous-ensembles de M induit une relation d'inclusion sur les germes donnée pour $A, B \subset M$ par :

$$[A]_a \subset [B]_a \text{ si et seulement si il existe un voisinage } V \text{ de } a \text{ dans } M \text{ tels que } A \cap V \subset B.$$

Lemme 3.1.10. Soient (M, v_M) une D -variété analytique réelle et $A \subset M$ un sous-ensemble fermé. On note (U, ϕ) le flot réel associé. On a équivalence entre :

- (i) Le sous-ensemble $A \subset M$ est ϕ -invariant.
- (ii) Pour tout $a \in A$, le germe du flot ϕ en $(0, a)$ noté $\phi_a : (\mathbb{R} \times M, (0, a)) \rightarrow (M, a)$ vérifie

$$\phi_a([\mathbb{R} \times A]_{(0, a)}) \subset [A]_a.$$

Démonstration. L'implication (i) \implies (ii) est tautologique. Montrons que (ii) \implies (i). Considérons $a \in A$ et notons $U_a = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a) \in U\}$ qui est un ouvert connexe de \mathbb{R} .

L'ensemble $G = \{t \in U_a \mid \phi(t, a) \in A\} \subset U_a$ est fermé non vide car $A \subset M$ est un sous-ensemble fermé. Pour tout $t \in G$, la propriété (ii) appliquée en $a' = \phi_t(a)$ montre que G est un voisinage de t . On en déduit que G est ouvert.

Par connexité de U_a , on en déduit que $G = U_a$ et donc que A est ϕ -invariant. \square

Définition 3.1.11. Soient X une variété algébrique sur $(\mathbb{R}, 0)$ et v_X un champ de vecteurs rationnel sur X . On appelle *flot réel régulier de (X, v_X)* , le flot réel associé à l'analytifié de la D -variété lisse $(U, v|_U)$ où $U = X \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v_X))$ ⁴.

Remarque 3.1.12. Soit (X, v_X) une D -variété réelle. La connaissance du flot réel régulier de (X, v_X) n'est pas suffisante pour étudier les sous-variétés invariantes de (X, v_X) et de ses produits : Les sous-variétés invariantes $W \subset (X, v_X)$ sans points réels n'auront aucune trace dans $X(\mathbb{R})$. Il suffit par exemple que $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ et on ne peut rien dire du tout.

3.1.2. Flot complexe d'une D -variété complexe. En travaillant avec un flot complexe, plutôt qu'avec le flot réel, on résout complètement la difficulté précédente. Néanmoins, contrairement au cas réel, le flot complexe n'admet pas d'ouvert maximal de définition et il faut travailler localement avec des germes de flots.

Définition 3.1.13. On appelle *D -espace analytique complexe*, tout couple (M, v_M) où M est un espace analytique complexe et v_M un champ de vecteurs analytique sur M .

Construction 3.1.14. Soit (X, v_X) une D -variété au dessus de $(\mathbb{C}, 0)$.

On munit l'ensemble $M = X(\mathbb{C})$ de sa structure analytique complexe. Le champ de vecteurs v_X induit un champ de vecteurs analytique v_M sur M . On obtient ainsi un D -espace analytique complexe (M, v_M) .

Comme dans le cas réel, la construction précédente détermine un foncteur de la catégorie des D -variétés au dessus de $(\mathbb{C}, 0)$ vers la catégorie des D -espaces analytiques complexes appelé *foncteur d'analytification complexe*. Contrairement au cas réel, ce foncteur est fidèle et réalise donc la catégorie des D -variétés au dessus de $(\mathbb{C}, 0)$ comme une sous-catégorie de la catégorie des D -espaces analytiques complexes.

⁴Ici, $\text{Sing}(v_X)$ désigne le complémentaire du plus grand ouvert de définition de v_X .

Définition 3.1.15. Soit (M, v_M) un D -espace analytique complexe. Le champ de vecteurs v_M induit une dérivation $\delta_M : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ sur le faisceau \mathcal{O}_M des fonctions analytiques sur M . Un sous-espace analytique fermé $Z \subset (M, v_M)$ est appelée δ_M -invariant si le faisceau d'idéaux $I_Z \subset \mathcal{O}_M$ définissant Z est stable par la dérivation δ_M .

Remarque 3.1.16. Dans le cas où le D -espace analytique complexe (M, v_M) est l'analytifié d'une D -variété au dessus de $(\mathbb{C}, 0)$ et où la sous-variété analytique $Z \subset (M, v_M)$ est l'analytifié d'une sous-variété algébrique, les deux notions d'invariance (analytique et algébrique) coïncident.

Construction 3.1.17. Soit (M, v_M) une D -variété analytique complexe. Le théorème d'existence et d'unicité locale de solutions pour les équations différentielles analytiques complexes [IY08, Théorème 1.1] assure que pour tout point $y \in M$, il existe un voisinage connexe $U_y \subset \mathbb{C} \times M$ de $(0, y)$ et d'une application analytique $\phi : U_y \rightarrow M$ tels que

$$\begin{cases} \forall (0, x) \in U_y, \phi(0, x) = x \\ \forall (t, x) \in U_y, \frac{d}{dt}\phi(t, x) = v_M(\phi(t, x)). \end{cases}$$

De plus, le germe de (U_y, ϕ) en $(y, 0)$ est unique.

Définition 3.1.18. Soient (M, v_M) une D -variété analytique complexe et $y \in M$. On appelle *germe de flot de v_M en $y \in M$* , le germe $\phi_y : (\mathbb{C} \times M, (y, 0)) \rightarrow (M, y)$ associé par la construction 3.1.17.

Définition 3.1.19. Soient (M, v_M) une D -variété analytique complexe et $A \subset M$ un sous-ensemble. On dit que $A \subset M$ est ϕ -invariant si pour tout $a \in A$, le germe du flot ϕ en $(0, a)$ noté $\phi_a : (\mathbb{C} \times M, (0, a)) \rightarrow (M, a)$ vérifie

$$\phi_a([\mathbb{C} \times A]_{(0, a)}) \subset [A]_a.$$

Proposition 3.1.20. Soient (M, v_M) une D -variété analytique complexe et $Z \subset M$ un sous-espace analytique complexe. On a équivalence entre :

- (i) La sous-variété analytique $Z \subset (M, v_M)$ est un sous-espace analytique δ_M -invariant.
- (ii) Le sous-ensemble $Z \subset M$ est ϕ -invariant.

Soit $a \in Z$. On note $\mathcal{O}_{M, a}$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques sur M en a . Le champ de vecteurs v_M munit l'anneau $\mathcal{O}_{M, a}$ d'une dérivation notée $\delta_a : \mathcal{O}_{M, a} \rightarrow \mathcal{O}_{M, a}$. En notant $\mathcal{O}_{M, a}\{t\}$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \times M$ en $(0, a)$, le germe du flot ϕ en a induit un morphisme d'anneaux :

$$\phi_a^\# : \begin{cases} \mathcal{O}_{M, a} \rightarrow \mathcal{O}_{M, a}\{t\} \\ f \mapsto f \circ \phi_a \end{cases}$$

Nous noterons encore $\delta_a : \mathcal{O}_{M, a}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_{M, a}\{t\}$ la dérivation déduite de δ_a définie par :

$$\delta_a\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \cdot t^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_a(f_n) \cdot t^n.$$

Remarquons que le morphisme d'anneaux $\cdot|_{t=0} : \mathcal{O}_{M, a}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_{M, a}$ est alors un morphisme d'anneaux différentiels.

Lemme 3.1.21. Avec les notations précédentes, on a pour tout $f \in \mathcal{O}_{M, a}$,

$$(*) \quad \begin{cases} \phi_a^\#(f)|_{t=0} = f \\ \frac{d}{dt}\phi_a^\#(f) = \delta_a(\phi_a^\#(f)) \end{cases}$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivation usuelle sur $\mathcal{O}_{M, a}\{t\}$. De plus, on a :

$$(**) \quad \phi_a^\#(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_a^n(f)}{n!} t^n.$$

Les identités (*) découlent aussitôt de la définition du flot ϕ (Construction 3.1.17). La formule (**) est une conséquence immédiate de (*). Des formules du type (**) apparaissent déjà chez Cauchy.

Preuve de la proposition 3.1.20. Montrons que $(ii) \implies (i)$. Il suffit de montrer que pour tout $a \in Z$, le faisceau d'idéaux $I_{Z,a} \subset \mathcal{O}_{M,a}$ est stable par la dérivation δ_a .

Fixons $a \in Z$. Par définition, on a $\phi_a([\mathbb{C} \times Z]_{(0,a)}) \subset [Z]_a$. On en déduit que pour tout $f \in I_{Z,a}$, on a :

$$\phi_a^\sharp(f) \in I_{\mathbb{C} \times Z, (0,a)} = I_{Z,a} \cdot \mathcal{O}_{M,a} \{t\}$$

Le lemme 3.1.21 permet de conclure que $\delta_a(f) = \frac{d}{dt} \phi_a^\sharp(f)|_{t=0} \in I_{Z,a}$, ce qui montre que $Z \subset (M, v_M)$ est bien une sous-variété analytique invariante.

Réciproquement, supposons que $Z \subset (M, v_M)$ est une sous-variété invariante. Fixons $a \in Z$. On a donc pour tout $f \in I_{Z,a} \subset \mathcal{O}_{M,a}$ et tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n!} \delta_a^n(f) \in I_{Z,a}$. Le lemme 3.1.21 permet d'affirmer que

$$f \in I_{Z,a} \implies \phi_a^\sharp(f) \in I_{Z,a} \cdot \mathcal{O}_{M,a} \{t\} = I_{\mathbb{C} \times Z, (0,a)}.$$

On en déduit que $\phi_a([\mathbb{C} \times Z]_{(0,a)}) \subset [Z]_a$, ce qu'il fallait démontrer. \square

3.1.3. Compatibilité des différentes notions d'invariances.

Proposition 3.1.22. *Soient (X, v_X) une D -variété lisse au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$ et $Z \subset X$ une sous-variété fermée invariante (définie sur \mathbb{R}). On note (M, ϕ) le flot réel de (X, v_X) . L'ensemble $Z(\mathbb{R}) \subset M$ est un fermé ϕ -invariant.*

Autrement dit, si $Z \subset X$ est une sous-variété fermée invariante alors pour tout $x \in Z(\mathbb{R})$, l'orbite \mathcal{O}_x de x est contenue dans Z .

Démonstration. Soit $Z \subset X$ une sous-variété fermée invariante. D'après la remarque 3.1.16, la sous-variété fermée analytique $Z(\mathbb{C})^{an} \subset M_{\mathbb{C}} = X(\mathbb{C})^{an}$ est $\delta_{M_{\mathbb{C}}}$ -invariante. D'après la proposition 3.1.20, on en déduit que, en notant ϕ_a le germe du flot complexe en $a \in M_{\mathbb{C}}$, on a :

$$\phi_a([\mathbb{C} \times Z(\mathbb{C})]_{(0,a)}) \subset [Z(\mathbb{C})]_a$$

Si $a \in M \subset M_{\mathbb{C}}$, le germe du flot réel en a est la restriction du germe du flot complexe aux nombres réels et vérifie :

$$\phi_a([\mathbb{R} \times M]_{(0,a)}) \subset [M]_a.$$

En prenant les intersections, on obtient que pour tout $a \in X(\mathbb{R})$:

$$\phi_a([\mathbb{R} \times Z(\mathbb{R})]_{(0,a)}) \subset [Z(\mathbb{R})]_a.$$

Le lemme 3.1.10 permet de conclure que $Z(\mathbb{R})$ est ϕ -invariant. \square

Voici une réciproque partielle au résultat précédent. Elle ne sera pas utilisée dans la preuve du critère d'orthogonalité aux constantes.

Proposition 3.1.23. *Soit (X, v_X) une D -variété lisse au-dessus de $(\mathbb{R}, 0)$. On note (M, ϕ) le flot réel de (X, v_X) . Si $A \subset X(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ϕ -invariant alors la clôture de Zariski \overline{A} de A est une sous-variété fermée invariante de (X, v_X) .*

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après le lemme 2.1.12, on peut supposer que X est affine. On note $Z = \overline{A}$ la clôture de Zariski de A dans X .

Il suffit de vérifier que l'idéal $I \subset \mathcal{O}_M(M)$ des fonctions analytiques qui s'annulent sur A est stable par la dérivation $\delta_v : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ induite par le champ de vecteurs v_M sur M . En effet, en utilisant l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{O}_M(M)$, l'idéal $I_Z \subset \mathbb{R}[X]$ définissant Z est donné par

$$I_Z = I \cap \mathbb{R}[X] \subset \mathcal{O}_M(M).$$

Ces deux sous-ensembles sont stables par la dérivation δ_v , et donc Z est une sous-variété invariante de (X, v_X) .

Montrons donc que le faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_M$ des fonctions analytiques s'annulant sur A est invariant par la dérivation δ_v .

Soient $f \in \mathcal{I}$ et $x \in M$. En notant $\phi_x : (\mathbb{R} \times M, (0, x)) \longrightarrow (M, x)$ le germe du flot ϕ en x , le germe de $\delta_v(f)$ en x est donné par :

$$\delta_v(f)_x = \frac{d}{dt}[f \circ \phi_x]_{|t=0}.$$

Comme A est un sous-ensemble ϕ -invariant, on a $f \circ \phi_x([\mathbb{R} \times A]_{(0,x)}) = 0$ et donc

$$\delta_v(f)_x([A]_x) = \frac{d}{dt}[f \circ \phi_x]_{|t=0}([A]_x) = 0.$$

On en déduit que le germe $\delta_v(f)_x$ de $\delta_v(f)$ en x appartient à \mathcal{I}_x pour tout $x \in M$ et donc que $\delta_v(f) \in I$. \square

Corollaire 3.1.24. *Soit (X, v_X) une D -variété au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$. La clôture de Zariski de $X(\mathbb{R})$ dans X est une sous-variété fermée invariante.*

Il suffit d'appliquer successivement les deux proposition 3.1.22 et 3.1.23. Cet énoncé a la forme d'un énoncé d'algèbre différentielle mais il est propre à l'extension de corps $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il n'est pas difficile de construire des exemples de D -variétés (X, v_X) définie sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels telles que la clôture de Zariski de $X(\mathbb{Q})$ ne soit pas invariante.

Par exemple, si C est une courbe affine sur le corps \mathbb{Q} admettant un nombre fini de points rationnels et si v_C est un champ de vecteurs régulier sur C qui ne s'annule pas en tous les points de $C(\mathbb{Q})$ alors la sous-variété fermée $\overline{C(\mathbb{Q})} = C(\mathbb{Q}) \subset (C, v_C)$ n'est pas invariante.

3.2. Flots topologiquement transitifs et topologiquement mélangeants. Dans cette partie, on se restreint à l'étude de flots réels complets $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$. De plus, au lieu de considérer des flots analytiques réels, on considère plus généralement des flots continus sur un espace métrisable, ce qui est le cadre naturel pour les résultats de cette partie.

Un flot réel continu s'identifie alors à une action du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ des nombres réels sur un espace métrisable M et donc à un système dynamique pour le groupe additif des nombres réels.

On renvoie aux trois premières sections du chapitre 1 de [Gla03] pour des résultats et notions analogues dans le cadre plus général des systèmes dynamiques sur un groupe topologique localement compact et de cardinal $\leq 2^{\aleph_0}$. Dans les prochains paragraphes, on donne une présentation autonome des résultats qui nous seront utiles dans la suite.

3.2.1. Flot topologiquement transitif. On fixe M un espace topologique métrisable.

Définition 3.2.1. Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot continu complet. On dit que $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est un *flot topologiquement transitif* si pour tout couple d'ouverts non vides $U, V \subset M$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Notation 3.2.2. Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot continu complet. Pour tout couple d'ouverts non vides $U, V \subset X$, on note

$$N(U, V) = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi_t(U) \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}$$

Un flot complet $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif si et seulement si pour tout couple d'ouverts non vides $U, V \subset M$, le sous-ensemble $N(U, V) \subset \mathbb{R}$ est non vide.

Remarque 3.2.3. Pour tout couple d'ouverts non vides $U, V \subset \mathbb{R}$, le sous-ensemble $N(U, V) \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R} . On en déduit que $N(U, V)$ s'écrit comme une union (au plus) dénombrable et éventuellement vide d'intervalles ouverts disjoints de \mathbb{R} .

De plus, remarquons que $N(U, V) = -N(V, U) \subset \mathbb{R}$.

Exemple 3.2.4. Si $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est le flot continu complet sur le disque unité $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induit par le champ de vecteurs unitaire sur \mathbb{S}^1 alors pour tout couple d'intervalles ouverts non vides $U, V \subset \mathbb{S}^1$, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que

$$N(U, V) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]a + 2.\pi k\mathbb{Z}; b + 2.\pi k\mathbb{Z}[.$$

Si $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est le flot continu complet sur la droite réelle induit par le champ de vecteurs constant $\frac{d}{dt}$ alors pour tout couple d'intervalles ouverts bornés non vides $U, V \subset \mathbb{R}$, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que

$$N(U, V) =]a, b[.$$

En particulier, les deux flots précédents sont topologiquement transitifs.

Avec des hypothèses topologiques raisonnables, on a la caractérisation suivante des flots complets continus topologiquement transitifs.

Proposition 3.2.5. *Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot complet continu. Supposons que M soit localement compact et séparable. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

- (i) *Le flot $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif.*
- (ii) *Il existe une orbite dense dans $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$.*

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Soient $U, V \subset M$ un couple d'ouverts non vide de M . Considérons $x \in M$ dont l'orbite est dense dans M .

Comme l'orbite de x est dense dans M , il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(x) \in U$ et un entier $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_s(x) \in V$. On en déduit que

$$\phi_{-s}(V) \cap \phi_{-t}(U) \neq \emptyset \text{ et donc } \phi_{s-t}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(i) \Rightarrow (ii) Considérons une base dénombrable d'ouverts $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de l'espace métrique séparable M . Remarquons qu'un sous-ensemble de M est dense si et seulement s'il rencontre tous les $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

On construit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de compacts d'intérieur non vide

$$V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1$$

tels que l'orbite de tout point de V_i rencontre les ouverts U_1, \dots, U_i .

- Pour $n = 1$, comme M est localement compact, il existe un compact $V_1 \subset U_1$ d'intérieur non vide.
- Supposons $V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1$ construits. Par hypothèse, $\overset{\circ}{V}_k$ est un ouvert non vide. Comme le flot est topologiquement transitif, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1}) \neq \emptyset$. L'ensemble $\overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1})$ est un ouvert non vide de M et par construction, l'orbite de chacun de ses points rencontre U_1, \dots, U_{k+1} . Comme M est localement compact, il suffit de choisir un compact V_{k+1} d'intérieur non vide tel que $V_{k+1} \subset \overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1})$.

Une intersection de compacts non vides emboîtés étant toujours non vide, considérons $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$. Par construction, l'orbite de x rencontre tous les $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et est donc dense dans M . \square

Corollaire 3.2.6. *Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot complet continu. Supposons que M soit localement compact et séparable. Si le flot $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif alors toute intégrale première continue est constante.*

En effet, si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est une intégrale première continue alors elle est constante sur chacune des orbites et donc en particulier sur l'une des orbites denses de M qui existe d'après la proposition précédente.

Exemple 3.2.7. Considérons le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ et le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini sur \mathbb{T}^n par le système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \omega_1 \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = \omega_n \end{cases}$$

où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{T}^n$. Le flot complet $(\mathbb{T}^n, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ défini par le système d'équations différentielles précédent est appelé le *flot constant sur le tore \mathbb{T}^n de fréquences $\omega_1, \dots, \omega_n$* .

Le flot $(\mathbb{T}^n, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif si et seulement si les fréquences $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont \mathbb{Z} -indépendantes [KH95, Proposition 1.5.1].

Remarque 3.2.8. Un produit de deux flots complets topologiquement transitifs n'est pas toujours topologiquement transitif :

Considérons les flots constants sur \mathbb{T}^n de fréquences respectives $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ et (τ_1, \dots, τ_n) . Le flot produit est le flot constant sur \mathbb{T}^{2n} de fréquences $(\omega_1, \dots, \omega_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$. D'après l'exemple 3.2.7, le flot produit est topologiquement transitif si et seulement si $(\omega_1, \dots, \omega_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$ sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants. En particulier le produit d'un flot constant sur le tore avec lui-même n'est jamais topologiquement transitif.

3.2.2. Flots faiblement topologiquement mélangeants. La condition "être topologiquement transitif" n'est donc pas stable par produit. On s'intéresse donc désormais à la classe des flots complets continus $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le flot produit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$ est topologiquement transitif.

Proposition 3.2.9. *Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot continu. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i) *Le flot $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif.*
- (ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le flot $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times \dots \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement transitif.*
- (iii) *La famille des $N(U, V)$ où U et V parcourent l'ensemble des ouverts non vides de M est une famille filtrante de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Rappelons que si E est un ensemble, une partie filtrante de $\mathcal{P}(E)$ est une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ vérifiant : pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que $C \subset A \cap B$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) est immédiat. Montrons que (iii) \Rightarrow (ii). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour vérifier que $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$ est topologiquement transitif, il suffit de vérifier que $N(U, V) \neq \emptyset$ pour U et V parcourant une base d'ouverts de M^n .

Les ouverts de la forme $U_1 \times \dots \times U_n$, où $U_1, \dots, U_n \subset M$ sont des ouverts de M , engendrent la topologie produit sur M^n . On en déduit que $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$ est topologiquement transitif si et seulement si

$$N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n) = N(U_1, V_1) \cap \dots \cap N(U_n, V_n) \neq \emptyset$$

lorsque $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ parcourent les ouverts non vides de M .

Soient $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ des ouverts non vides de M . D'après la propriété (iii), il existe des ouverts non vides $A, B \subset M$ tels que $N(A, B) \subset N(U_{n-1}, V_{n-1}) \cap N(U_n, V_n)$. On en déduit que :

$$N(U_1, V_1) \cap \dots \cap N(U_{n-2}, V_{n-2}) \cap N(A, B) \subset N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n).$$

Par induction, il existe des ouverts non vides $\tilde{A}, \tilde{B} \subset M$ tels que :

$$N(\tilde{A}, \tilde{B}) \subset N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n).$$

En particulier, on obtient que $N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n) \neq \emptyset$ car $N(\tilde{A}, \tilde{B}) \neq \emptyset$.

Montrons que (i) \Rightarrow (iii). Soient U_1, V_1, U_2, V_2 des ouverts non vides de M . Le système dynamique $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ étant topologiquement transitif, on a

$$N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

En particulier, $N(U_1, V_1)$ est toujours non vide.

De plus, considérons $t \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ et posons $A = \phi_t(U_1) \cap U_2$ et $B = \phi_t(V_1) \cap V_2$. Par hypothèse sur t , A et B sont des ouverts non vides de M et on vérifie facilement que

$$N(A, B) \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2). \quad \square$$

Définition 3.2.10. Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot complet continu. On dit que $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est un *flot faiblement topologiquement mélangeant* si l'une des trois conditions équivalentes de la proposition 3.2.9 est vérifiée.

Exemple 3.2.11. Le calcul direct des $N(U, V)$ pour les exemples 3.2.4 montrent que ces deux flots ne sont pas faiblement topologiquement mélangeants.

De même, la remarque 3.2.8 montre que les flots constants sur le tore (exemple 3.2.7) ne sont pas faiblement topologiquement mélangeants non plus.

L'exemple fondamental de flot faiblement topologiquement mélangeant est le flot géodésique unitaire sur une variété réelle compacte munie d'une métrique à courbure strictement négative (voir [Ano67], [Cou04], [Dal99]). Cet exemple sera le point de départ des applications pour le critère d'orthogonalité aux constantes présenté dans ce texte et sera discuté dans une suite de cet article.

Définition 3.2.12. Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot complet continu. On dit que $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est *un flot topologiquement mélangeant* si pour tout couple d'ouverts non vides $U, V \subset M$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq T$, $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Comme la terminologie l'indique, un flot topologiquement mélangeant est faiblement topologiquement mélangeant. En effet, si $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est topologiquement mélangeant alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous ouverts non vides $U_1, \dots, U_n \subset M$ et $V_1, \dots, V_n \subset M$, il existe un réel $T > 0$ tel que

$$N(U_1 \times \dots \times U_n, V_1 \times \dots \times V_n) = N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \cap \dots \cap N(U_n, V_n) \supset [T; \infty[$$

En particulier, cet ensemble est non vide et donc $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$ est topologiquement transitif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.2.13. Soit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ un flot complet faiblement topologiquement mélangeant. Supposons que l'espace topologique M soit séparable et localement compact.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le flot produit $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times \dots \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ n'admet pas d'intégrales premières continues non constantes.

C'est une conséquence directe de la proposition 3.2.9 et de la proposition 3.2.6.

3.3. Le critère d'orthogonalité aux constantes. Dans cette section, on établit le critère annoncé d'orthogonalité aux constantes pour les D -variétés réelles.

Le point de départ est le premier critère d'orthogonalité aux constantes (Théorème 2.3.4). On étudie alors les conséquences de l'existence d'une intégrale première rationnelle non constante sur la structure des orbites du flot réel associé. La difficulté principale est de contrôler les orbites qui rencontrent le lieu d'indétermination de cette intégrale première rationnelle. Pour cela, nous montrons que ce lieu d'indétermination est une sous-variété fermée invariante, résultat pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence.

La technologie des flots faiblement mélangeants, exposée dans la partie précédente, permet alors de contrôler en même temps le flot réel associé et tous ses produits et ainsi d'obtenir le critère voulu.

3.3.1. Intégrale première rationnelle. On étudie plus généralement les conséquences de l'existence d'une intégrale première rationnelle pour les D -variétés définies sur des corps de constantes. On fixe k un corps de caractéristique 0.

Notation 3.3.1. Soient X une variété algébrique irréductible sur le corps k et $f \in k(X)$ une fonction rationnelle. Alors f définit un morphisme rationnel de variétés $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ qui admet un plus grand ouvert de définition $U \subset X$.

Le graphe $G_f \subset U \times \mathbb{P}^1$ de f s'identifie à une sous-variété fermée irréductible de $U \times \mathbb{P}^1$. Sa clôture de Zariski dans $X \times \mathbb{P}^1$ sera notée \overline{G}_f .

Lemme 3.3.2. Soient (X, v_X) une D -variété irréductible au dessus de $(k, 0)$ et $f \in k(X)$ une fonction rationnelle. On a équivalence entre :

- (i) La fonction rationnelle f est une intégrale première rationnelle de (X, v_X) .
- (ii) La sous-variété fermée $\overline{G}_f \subset (X, v_X) \times (\mathbb{P}^1, 0)$ est une sous-variété fermée invariante.

Démonstration. Considérons $U \subset X$ un ouvert affine tel que $f|_U : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ est une fonction régulière. D'après les lemmes 2.1.12 et 2.1.7, il suffit de vérifier l'équivalence pour $f|_U$. On peut donc supposer que $U = X$, c'est à dire que X est affine et que $f \in k[X]$.

Le graphe $G_f \subset X \times \mathbb{A}^1$ de f est alors l'hypersurface de $X \times \mathbb{A}^1$ d'équation $Y - f = 0$.

On en déduit que G_f est une sous-variété invariante de $(X, v_X) \times (\mathbb{A}^1, 0)$ si et seulement si il existe $h(Y) \in k[X][Y]$ tel que

$$\delta_X(f) = h(Y)(Y - f) \in k[X][Y].$$

En comparant les degrés en Y , on voit que nécessairement $h(X, Y) = 0$ et donc que la seconde condition est équivalente à $\delta_X(f) = 0$, autrement dit que f est une intégrale première rationnelle de (X, v_X) . \square

Définition 3.3.3. Soient X une variété algébrique irréductible et $f \in k(X)$ une fonction rationnelle. On appelle *lieu d'indétermination de f* et on note $\text{Ind}(f)$, le complémentaire du plus grand ouvert de définition de $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Le lieu d'indétermination de f est donc une sous-variété fermée de X .

Remarque 3.3.4. Soient X une variété algébrique irréductible et lisse et $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction rationnelle sur X . En notant $\pi_f : \overline{G_f} \rightarrow X$ la restriction de la première projection à $\overline{G_f}$, d'après le Main Theorem de Zariski [Mum95, Théorème 3.20], on a la description suivante de $\text{Ind}(f)$:

$$\text{Ind}(f) = \{x \in X \mid \pi_f^{-1}(x) \text{ admet une composante irréductible de dimension } > 0\}$$

Comme $\overline{G_f} \subset X \times \mathbb{P}^1$, la condition précédente se réécrit :

$$\text{Ind}(f) = \{x \in X \mid \{x\} \times \mathbb{P}^1 \subset \overline{G_f}\}.$$

Lemme 3.3.5. Soient (X, v_X) une D -variété irréductible et lisse au-dessus de $(k, 0)$ et $f \in k(X)$ une intégrale première rationnelle. Le lieu d'indétermination de f , $\text{Ind}(f) \subset (X, v_X)$ est une sous-variété fermée invariante.

Démonstration. On note $Z = \text{Ind}(f) \subset X$ le lieu d'indétermination de f qui est donc une sous-variété fermée de X . On commence par décrire le faisceau d'idéaux associé à Z avant de vérifier qu'il est invariant.

Considérons $U \subset X$ un ouvert affine. La sous-variété fermée irréductible $G_U := \overline{G_f} \cap (U \times \mathbb{A}^1) \subset U \times \mathbb{A}^1$ est une hypersurface. Comme $U \times \mathbb{A}^1$ est lisse, il existe $F \in k[U][T]$ tel que $G_U \subset U \times \mathbb{A}^1$ est l'hypersurface d'équation $F(X, T) = 0$. Fixons $t_0 \in k$. D'après la remarque 3.3.4, on a alors

$$Z = \{x \in X \mid F(x, \cdot) = 0\} = \{x \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial}{\partial t^n} F(x, t_0) = 0\}.$$

On en déduit que $I_Z(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ est l'idéal engendré par $\frac{\partial}{\partial t^n} F(X, t_0)$ où n parcourt \mathbb{N} .

D'après le lemme 3.3.2, la sous-variété fermée $G_U \subset (U, v_X) \times (\mathbb{A}^1, 0)$ est une sous-variété invariante, donc il existe $h(X, Y) \in k[U][T]$ tel que

$$\delta_{X \times \mathbb{A}^1}(F(X, T)) = h(X, T)F(X, T).$$

Les dérivations $\delta_{X \times \mathbb{A}^1}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent (car $\delta_{X \times \mathbb{A}^1}(T) = 0$) et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[\delta_{X \times \mathbb{A}^1} \frac{\partial}{\partial t^n} F](X, t_0) = [\frac{\partial}{\partial t^n} \delta_{X \times \mathbb{A}^1}(F)](X, t_0) = [\frac{\partial}{\partial t^n} (h.F)](X, t_0)$$

Comme $I_Z(U)$ est l'idéal engendré par $\frac{\partial}{\partial t^n} F(X, t_0)$ où n parcourt \mathbb{N} , la règle de Leibniz pour les dérivations supérieures d'un produit permet alors de conclure que $I_Z(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ est un idéal invariant et donc que $\text{Ind}(f)$ est une sous-variété fermée invariante. \square

Proposition 3.3.6. Soit (X, v_X) une D -variété irréductible et lisse au-dessus de $(k, 0)$ admettant une intégrale première rationnelle non constante. En notant Inv l'ensemble des sous-variétés fermées invariantes strictes de (X, v_X) , on a :

$$X(k) = \bigcup_{Z \in \text{Inv}} Z(k).$$

Démonstration. Considérons $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ une intégrale première rationnelle non constante et notons U son plus grand ouvert de définition.

Considérons $x \in X(k)$. On a deux cas :

- Si $x \in U(k)$ alors en notant $a = f(x)$, $f^{-1}(a)$ est une sous-variété fermée invariante de (U, v_X) contenant x et de codimension 1. Sa clôture de Zariski dans X est une sous-variété fermée invariante (d'après le lemme 2.1.12) et stricte de (X, v_X) .
- Si $x \notin U(k)$ alors $x \in \text{Ind}(f)$ qui est une sous-variété fermée invariante stricte d'après le lemme 3.3.5. \square

3.3.2. Enoncé et démonstration du critère 3.3.8.

Lemme 3.3.7. *Soient (M, v_M) une D -variété analytique réelle et $K \subset M$ un compact ϕ -invariant. On note (U, ϕ) le flot réel associé. La restriction du flot ϕ au sous-ensemble K est un flot complet.*

Démonstration. Pour tout $x \in M$, notons $U_x =]t^-(x); t^+(x)[$ où $t^-(x) < 0 < t^+(x)$, le plus grand ouvert de définition de la courbe intégrale ϕ_x de v_M en $x \in M$ vérifiant $\phi_x(0) = x$.

Les fonctions $t^+ : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ et $t^- : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ sont des fonctions continues. Comme K est compact, le réel $\epsilon = \inf_{x \in K} t^+(x)$ est strictement positif.

On raisonne par l'absurde en considérant $x_0 \in K$ tel que, par exemple, $t_0 = t^+(x) < \infty$. Posons $x_1 = \phi_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}(x) \in K$ car K est ϕ -invariant.

La courbe définie par :

$$\overline{\phi_x} : \begin{cases}]t^-(x); t^+(x) + \frac{\epsilon}{2}[\rightarrow M \\ t \mapsto \begin{cases} \phi_{x_0}(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ \phi_{x_1}(t - t_0 - \frac{\epsilon}{2}) & \text{si } t \geq t_0 - \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \end{cases}$$

est bien définie par la propriété de semi-groupe du flot associé au champ de vecteurs v_M . On vérifie aisément que $\overline{\phi_x}$ est une courbe intégrale de v_M vérifiant $\overline{\phi_x}(0) = x$, ce qui contredit la maximalité de U_x .

De même, on obtient que $t^-(x) = -\infty$ pour tout $x \in K$ et donc que la restriction du flot ϕ au compact K est complet. \square

Théorème 3.3.8. *Soient X une variété absolument irréductible sur \mathbb{R} et v un champ de vecteurs rationnel sur X . On note (M, ϕ) le flot régulier réel de (X, v_X) . Supposons qu'il existe un compact $K \subset M$ Zariski-dense dans X et invariant par le flot ϕ . La restriction du flot ϕ à K est alors un flot métrisable complet.*

Si $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$ est faiblement topologiquement mélangeant alors le type générique de (X, v) est orthogonal aux constantes.

Démonstration. La conclusion reste inchangée lorsque l'on remplace X par $U = X \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v))$. On peut donc supposer que (X, v) est une D -variété absolument irréductible et lisse au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$.

Lemme 3.3.9. *Soit (X, v) une D -variété irréductible lisse au dessus de $(\mathbb{R}, 0)$. Si le flot réel associé (M, ϕ) admet une orbite Zariski-dense dans X alors (X, v) est sans intégrale première rationnelle non constante.*

Démonstration. Considérons $x \in M = X(\mathbb{R})$ dont l'orbite est Zariski-dense dans X et $Z \subset X$ une sous-variété fermée invariante contenant x . D'après la proposition 3.1.22, l'orbite \mathcal{O}_x de $x \in M$ est contenue dans $Z(\mathbb{R})$ et comme cette orbite est Zariski-dense dans X , on en déduit que $Z = X$. On en déduit que $x \notin \bigcup_{Z \in \text{Inv}} Z(\mathbb{R})$. La proposition 3.3.6 permet de conclure que (X, v) est sans intégrale première rationnelle. \square

La fin de la démonstration est alors formelle : Puisque $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$ est faiblement topologiquement mélangeant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le flot $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})^n$ est topologiquement transitif et admet donc une orbite $\mathcal{O}_n \subset K^n$ dense pour la topologie analytique (Proposition 3.2.5).

De plus, $K \subset X$ est Zariski-dense et donc $K^n \subset X^n$ aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$. La topologie analytique étant plus fine que la topologie de Zariski, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X, v)^n$ admet \mathcal{O}_n pour orbite Zariski-dense.

D'après le lemme précédent, la D -variété $(X, v)^n$ est sans intégrale première rationnelle non constante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Son type générique est donc orthogonal aux constantes d'après le théorème 2.3.4. \square

RÉFÉRENCES

- [Ano67] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 90, 1967.
- [Arn06] Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Translated from the Russian by Roger Cooke, Second printing of the 1992 edition.
- [Bos86] Jean-Benoît Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...). *Astérisque*, (133-134) :113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.
- [Bui93] Alexandru Buium. Geometry of differential polynomial functions. I. Algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 115, 1993.
- [Cou04] Yves Coudene. Topological dynamics and local product structure. *J. London Math. Soc.* (2), 69(2) :441–456, 2004.
- [Dal99] Françoise Dal'bo. Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(2) :199–221, 1999.
- [FS14] James Freitag and Thomas Scanlon. Strong minimality of the j -function. *arXiv*, 2014.
- [Gla03] Eli Glasner. *Ergodic theory via joinings*, volume 101 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [HI03] E. Hrushovski and M. Itai. On model complete differential fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355, 2003.
- [Hru93] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic*, 62(2) :147–166, 1993. Stability in model theory, III (Trento, 1991).
- [Hru96] Ehud Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :667–690, 1996.
- [HS96] Ehud Hrushovski and Zeljko Sokolovic. Minimal subsets of differentially closed fields. *Preprint*, 1996.
- [HS99] Ehud Hrushovski and Thomas Scanlon. Lascar and Morley ranks differ in differentially closed fields. *J. Symbolic Logic*, 64(3) :1280–1284, 1999.
- [HZ96] Ehud Hrushovski and Boris Zilber. Zariski geometries. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :1–56, 1996.
- [IY08] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [MMP06] David Marker, Margit Messmer, and Anand Pillay. *Model theory of fields*, volume 5 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, second edition, 2006.
- [MR99] Juan J. Morales Ruiz. *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, volume 179 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.
- [Nis89] Keiji Nishioka. A conjecture of mahler on automorphic functions. *Archiv der Mathematik*, 53(1) :46–51, 1989.
- [NP14] Joel Nagloo and Anand Pillay. On the algebraic independence of generic Painlevé transcendents. *Compos. Math.*, 150(4) :668–678, 2014.
- [Pil96] Anand Pillay. *Geometric stability theory*, volume 32 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.

- [Pil98] Anand Pillay. Differential Galois theory. I. *Illinois J. Math.*, 42(4) :678–699, 1998.
- [Poi57] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.* Dover Publications, Inc., New York, N.Y., 1957.
- [Poi95] Bruno Poizat. Les corps différentiellement clos, compagnons de route de la théorie des modèles. *Math. Japon.*, 42(3) :575–585, 1995.
- [Poi01] Bruno Poizat. *Stable groups*, volume 87 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1987 French original by Moses Gabriel Klein.
- [PZ03] Anand Pillay and Martin Ziegler. Jet spaces of varieties over differential and difference fields. *Selecta Math. (N.S.)*, 9, 2003.
- [Ros74] Maxwell Rosenlicht. The nonminimality of the differential closure. *Pacific J. Math.*, 52 :529–537, 1974.
- [She79] Saharon Shelah. On uniqueness of prime models. *J. Symbolic Logic*, 44(2) :215–220, 1979.
- [TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A course in model theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [UW97] Hiroshi Umemura and Humihiko Watanabe. Solutions of the second and fourth painlevé equations. i. *Nagoya Math. J.*, 148 :151–198, 1997.

RÉMI JAOUÏ, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, BÂTIMENT 425, 91405 ORSAY, FRANCE
E-mail address: remi.jaoui@math.u-psud.fr